



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"**

**"DISEÑO Y DESARROLLO DE UN MANUAL DE PRÁCTICAS PARA LA MATERIA DE
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES (PDS)"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

PRESENTA:

ARROYO LEYVA JORGE HEIDRYK

ASESORES:

M. EN C. ALLAN TAKESHI DE LA CRUZ OLIVA

M. EN C. ARACELI IBÁÑEZ SANDOVAL



MÉXICO D.F. MARZO 2015

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELECTRICA
UNIDAD PROFESIONAL "ADOLFO LÓPEZ MATEOS"

TEMA DE TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
POR LA OPCIÓN DE TITULACIÓN
DEBERA (N) DESARROLLAR

INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA
TESIS Y EXAMEN ORAL INDIVIDUAL
JORGE HEIDRYK ARROYO LEYVA

**"DISEÑO Y DESARROLLO DE UN MANUAL DE PRÁCTICAS PARA LA MATERIA DE
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES (PDS)"**

CREAR UN MANUAL DE PRÁCTICAS PARA LA MATERIA DE PDS QUE AYUDE A REFORZAR LOS TEMAS
VISTOS EN CLASE.

ELABORAR 10 PRÁCTICAS QUE CUBRAN EL CONTENIDO TEMÁTICO DE LA MATERIA DE PDS.

MÉXICO D.F. A 9 DE JUNIO DE 2014

ASESOR

M. C. ALLAN TAKESHI DE LA CRUZ OLIVA

M. C. ARACELI IBÁÑEZ SANDOVAL

ING. PATRICIA LORENA RAMÍREZ RANGEL
JEFE DEL DEPARTAMENTO ACADÉMICO
DE INGENIERÍA EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

Índice general

Tema	Pág.
Índice general	I
Índice de figuras	II
Índice de tablas	VI
CAPITULO I INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO II: FUNDAMENTOS	3
CAPÍTULO III: CONTENIDO TEMÁTICO, CONCEPTOS BÁSICOS.	9
II.1 Práctica 1. Digitalización de una señal analógica	12
II.2 Práctica 2. Transformada z.	22
II.3 Práctica 3. Propiedades de la transformada z.	36
II.4 Práctica 4. Transformada z inversa.	48
CAPÍTULO IV: CONTENIDO TEMÁTICO, ANÁLISIS EN FRECUENCIA	59
III.1 Práctica 5. Serie de Fourier en tiempo discreto.	61
III.2 Práctica 6. Transformada discreta de Fourier.	85
III.3 Práctica 7. Transformada rápida de Fourier.	106
III.4 Práctica 8. Convolución lineal y circular.	114
CAPÍTULO V: CONTENIDO TEMÁTICO, DISEÑO DE FILTROS DIGITALES	125
IV.1 Práctica 9. Diseño de filtros digitales IIR.	127
IV.2 Práctica 9A. Diseño de filtros FIR.	140
IV.3 Proyecto terminal A. Calculadora.	146
IV.4 Proyecto terminal B. FFT aplicado a un generador de señales.	152
IV.5 Proyecto terminal C. Reconocimiento de audio.	162
CAPITULO VI: CONCLUSIONES	167
REFERENCIAS	169

Índice de figuras

Figura 1: Señal 'a' continua.	16
Figura 2: Señal 'a' digitalizada	17
Figura 3: Señal 'b' continua.	17
Figura 4: Señal 'b' digitalizada.	17
Figura 5: Señal 'c' continua.	18
Figura 6: Señal 'c' digitalizada	18
Figura 7: Señal 'd' continua.	18
Figura 8: Señal 'd' digitalizada.	19
Figura 9: Señal 'e' digitalizada.	19
Figura 10: Señal 'e' digitalizada.	19
Figura 11: Señal 'f' continua	20
Figura 12: Señal 'f' digitalizada.	21
Figura 13: Señal potencia digitalizada.	23
Figura 14: Diagrama de polos y ceros para $z\{x[n]\}$	24
Figura 15: Función discreta 'a'.	26
Figura 16: Diagrama de polos y ceros para la función discreta 'a'.	27
Figura 17: Transformada z, función 'a'.	27
Figura 18: Función discreta 'b'.	28
Figura 19: Diagrama de polos y ceros para la función discreta 'b'.	28
Figura 20: Transformada z, función b	29
Figura 21: Función discreta 'c'.	29
Figura 22: Diagrama de polos y ceros para la función discreta 'c'.	30
Figura 23: Transformada z, función c	30
Figura 24: Función discreta 'd'	31
Figura 25: Diagrama de polos y ceros para la función discreta 'd'	32
Figura 26: Transformada z, función 'd'	32
Figura 27: Función discreta 'e'	33
Figura 28: Diagrama de polos y ceros para la función discreta 'e'	34
Figura 29: Transformada z, función 'e'	34
Figura 30: Desplazamiento en tiempo, transformada z, resultado	40
Figura 31: Desplazamiento en el tiempo aplicado.	41

Figura 32: Cambio de escala, transformada z, resultado	41
Figura 33: Diferenciación, transformada z, resultado.	42
Figura 34: Multiplicación por coseno, transformada z, resultado.	43
Figura 35: Multiplicación por seno, transformada z, resultado.	45
Figura 36: Expansión en el tiempo, transformada z, resultado.	46
Figura 37: Aplicación del método computacional a la transformada z inversa, resultado	54
Figura 38: Diagrama a bloques del sistema	56
Figura 39: Respuesta al impulso	56
Figura 40: Verificación de la SFTD, señal original	67
Figura 41: Gráfica de la señal original	68
Figura 42: Espectro de magnitudes, señal original	68
Figura 43: Espectro de fases, señal original	69
Figura 44: Verificación de la SFTD, desplazamiento en el tiempo	70
Figura 45: Espectro de magnitudes, desplazamiento en el tiempo	70
Figura 46: Espectro de fases, desplazamiento en el tiempo	71
Figura 47: Verificación de la SFTD, desplazamiento en frecuencia	71
Figura 48: Espectro de magnitudes, desplazamiento en frecuencia	72
Figura 49: Espectro de fases, desplazamiento en frecuencia	72
Figura 50: Verificación de la SFTD, conjugación	73
Figura 51: Espectro de magnitudes, conjugación	74
Figura 52: Espectro de magnitudes, conjugación	74
Figura 53: Verificación de la SFTD, inversión en el tiempo	74
Figura 54: Espectro de magnitudes, inversión en el tiempo	75
Figura 55: Espectro de fases, inversión en el tiempo	76
Figura 56: Espectro de magnitudes, escalamiento en el tiempo	77
Figura 57: Espectro de fases, escalamiento en el tiempo	77
Figura 58: Verificación de la SFTD, dualidad producto-convolución	78
Figura 59: Espectro de magnitudes, dualidad producto-convolución	79
Figura 60: Espectro de fases, dualidad producto-convolución	79

Figura 61: Verificación de la SFTD, primera diferencia hacia atrás	80
Figura 62: Espectro de magnitudes, primera diferencia hacia atrás	81
Figura 63: Espectro de fases, primera diferencia hacia atrás	81
Figura 64: Script para el cálculo de la SFTD.	82
Figura 65: Diagrama DFT y SFTD	85
Figura 66: DFT & SFTD	86
Figura 67: Pulso de radar	90
Figura 68: Funcionamiento del radar tipo ISAR	90
Figura 69: Salida del script para la DFT	95
Figura 70: Salida del script para la FFT	112
Figura 71: Convolución Lineal	114
Figura 72: Señal en un electrocardiograma	129
Figura 73: Diagrama de Bode 1	134
Figura 74: Código diagrama de Bode 2	135
Figura 75: Diagrama de Bode 2	135
Figura 76: Código diagrama de Bode 3	136
Figura 77: Diagrama de Bode 3	137
Figura 78: Código diagrama de Bode 4	138
Figura 79: Diagrama de Bode 4	139
Figura 80: Diagrama filtros FIR	141
Figura 81: Ecualizador por filtro FIR	142
Figura 82: Diagrama Filtro FIR	142
Figura 83: Error, método de Remez	143
Figura 84: Polinomio orden 7, 10 puntos de rizado	144
Figura 85: Script para el método de Remez	145
Figura 86: Salida para el método de Remez en MATLAB.	145
Figura 87: Opciones del menú	147
Figura 88: Ingresar secuencia $x[n]$	148
Figura 89: Ingresar secuencia $h[n]$	148
Figura 90: Secuencia almacenada $x[n]$	148
Figura 91: Secuencia almacenada $h[n]$	148
Figura 92: Cálculo de la DFT	149
Figura 93: Cálculo de la DFT	149
Figura 94: Mensajes de error	149
Figura 95: Mensajes de error	149

Figura 96: Espectro de Fases	149
Figura 97: Espectro de magnitudes	150
Figura 98: Convolución	150
Figura 99: Diagrama de flujo	151
Figura 100: Diagrama del generador de funciones	153
Figura 101: Conexión al osciloscopio del generador digital	154
Figura 102: Código del generador digital, micro c.	
Figura 103: Espectro de frecuencias para las notas musicales	163
Figura 104: Script para el reconocimiento de audio.	166

Índice de tablas

Tabla 1: Panorama general de la formación del ingeniero en I.C.E. de la E.S.I.M.E. Zacatenco.	4
Tabla 2: Muestreo natural e ideal.	12
Tabla 3: Señal Analógica Vs Señal Digital.	14
Tabla 4: Lista de comandos 1.	16
Tabla 5: Digitalización de la función a.	16
Tabla 6: Digitalización de la función b.	17
Tabla 7: Digitalización de la función c.	18
Tabla 8: Digitalización de la función d.	18
Tabla 9: Digitalización de la función e.	19
Tabla 10: Digitalización de la función f.	20
Tabla 11: Lista de comandos 2.	26
Tabla 12: Propiedades de la transformada z.	36
Tabla 13: Lista de comandos 3.	39
Tabla 14: Lista de comandos 4.	51
Tabla 15: Serie de Fourier en tiempo discreto	61
Tabla 16: Propiedades SFTD.	63
Tabla 17: Lista de comandos 5.	65
Tabla 18: Propiedades de la transformada discreta de Fourier	89
Tabla 19: Lista de comandos 6	92
Tabla 20: Lista de comandos 7	109
Tabla 21: Lista de comandos 8.	118
Tabla 22: Convolución circular	122
Tabla 23: Tipos de filtros	130
Tabla 24: Lista de comandos 9	131
Tabla 25: Filtro RC (era figura)	132
Tabla 26: Filtros IIR vs filtros FIR	141
Tabla 27: El osciloscopio y la FFT	158
Tabla 28: Octava musical	160

AGRADECIMIENTOS

Culminar los estudios a nivel licenciatura es para mí la suma del aporte de muchas personas que me han dado su apoyo a lo largo de toda mi vida. Mi madre ha sido una persona muy importante en mi vida, ella fue quién cultivó en mí el gusto por la ingeniería cuando tenía pocos años de edad, siempre estuvo muy atenta de mí y mis hermanas, por estas y muchas otras razones es que la menciono al principio. Mis hermanas Brenda y Karen me han ayudado mucho en momentos en los que he tenido dificultades, cuando necesité su ayuda siempre estuvieron ahí para aconsejarme y salir adelante, me da gusto que a lo largo de todo este tiempo me hayan transmitido la alegría por la vida. A mi amigo incondicional, quién me acompañó en muchas noches de desvelo, mi gato Sulley, muchas gracias!!, siempre te recordaré, como recuerdo aquellos desvelos contigo ronroneando. A mis tíos, quienes me cuidaron varias veces estando en los primeros años de la escuela, Gracias. Agradezco también a mis abuelos quienes me manifestaron su apoyo en muchas ocasiones.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN



La unidad de aprendizaje de Procesamiento Digital de Señales (PDS) hace acopio de muchos de los conocimientos que se adquieren a lo largo de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica (I.C.E.); parte importante de los conocimientos requeridos corresponden al área de matemáticas impartida en la carrera I.C.E., específicamente es muy necesario un buen dominio de Transformadas de Funciones, así mismo es importante conocer las características de los elementos analógico y digitales, este último aspecto está presente en la mayoría de las unidades de aprendizaje, por mencionar algunas: electrónica digital, comunicaciones analógicas, etc..

El presente trabajo surgió debido a la necesidad de contar con un manual de prácticas para la unidad de aprendizaje de PDS, ya que no se cuenta con prácticas de laboratorio estandarizadas. La matemática y complejidad presentes en la unidad de aprendizaje de PDS requiere de cálculos detallados debido a la naturaleza de las señales tratadas, es por ello que la propuesta que se presenta en este trabajo busca ser un apoyo en el aprendizaje del estudiantado.

Este manual abarca las tres unidades que se señalan en el plan de estudios de la unidad de aprendizaje de PDS; se tiene un total de diez prácticas organizadas en tres bloques que corresponden a cada una de las unidades de la unidad de aprendizaje; los primeros dos bloques de prácticas apoyan el estudio de la herramienta matemática necesaria en la implementación de los filtros digitales, al llegar al tercer bloque se cuenta con la correspondiente práctica de filtros y se propone un trabajo de investigación, además de un proyecto de aplicación en el cual se ofrecen tres alternativas distintas. Cada práctica ofrece distintos ejercicios para el estudiantado respetando el orden y los espacios asignados al laboratorio. Dentro del presente manual existen sugerencias que se hacen a los usuarios del manual, por ejemplo el establecer equipos de tres personas como máximo y también, dado que muchas veces el tiempo del curso no es suficiente, se establecen cuáles de las prácticas son indispensables y cuales, en caso de falta de tiempo, pueden ser omitidas. En cada una de las prácticas propuestas se proponen varios ejercicios, de manera que cada equipo tenga su propio ejercicio asignado, se resuelve en este trabajo un solo ejercicio elegido al azar a modo de ejemplo de lo que se espera que el estudiante responda. Las prácticas que se proponen en el manual brindan la posibilidad de apoyar el análisis matemático efectuado en clase, comprobando estos resultados con los obtenidos computacionalmente, convirtiéndose así en una herramienta indispensable en el análisis de señales digitales.

Se optó por el uso del paquete MATLAB, el cual es una gran herramienta en el estudio de una ingeniería e inclusive en la industria, las prácticas propuestas ayudan a conocer y utilizar esta herramienta, lo cual es una ventaja para los estudiantes ya que este software también es utilizado en otras unidades de aprendizaje, por ejemplo en la especialidad de control.

Se ha tomado en consideración que algunos comandos pueden resultar poco comunes, es por ello que en cada práctica se han resumido los comandos más importantes en una lista que permite utilizar MATLAB eficazmente y evite consumir tiempo buscando los comandos adecuados, lo que es uno de los errores más comunes en la realización de cada práctica, de esta manera se simplifica el trabajo del estudiante y junto con el hecho de sugerir equipos de trabajo conformados por tres personas existe la posibilidad de utilizar el paquete de programación MATLAB sin problemas.

Para un mejor entendimiento en la lectura de este trabajo de tesis se ha dividido su estructura en seis capítulos. El primero es la presentación del trabajo, el segundo capítulo describe el manual de prácticas, el tercer capítulo aborda la primera unidad del plan de estudios correspondiente a la transformada zeta, el cuarto capítulo analiza las series y transformadas de Fourier en sus distintos casos, las cuales cubren la segunda unidad del plan de estudios. En el quinto capítulo se contempla la parte final del programa que abarca el análisis de filtros digitales. Y es en este punto donde se propone un proyecto final de aplicación. Finalmente en el sexto capítulo se dan las conclusiones.



CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS



2.1 ANTECEDENTES

Por su naturaleza existen magnitudes físicas que pueden ser convertidas en una señal eléctrica. Las señales eléctricas pueden ser clasificadas en analógicas y digitales, una señal analógica varía en forma continua dentro de un rango, mientras que las señales digitales toman valores discretos. Normalmente, las señales analógicas son digitalizadas dado que hoy en día se dispone de la tecnología para almacenar, comprimir y manipular señales digitales. Es posible manipular ambos tipos de señales, sin embargo las herramientas necesarias (matemáticas, hardware, etc.) son diferentes.

En la unidad de aprendizaje de Procesamiento Digital de Señales el tipo de señales que se analizan, como su nombre lo indica, son de naturaleza discreta exclusivamente, a este respecto se ha detectado que en lo referente al laboratorio de dicha unidad de aprendizaje, no existe un manual de prácticas que los maestros utilicen para complementar la teoría vista en clase y las que se realizan son hechas bajo criterio personal. El presente trabajo surge como un intento por estandarizar las prácticas de laboratorio de esta unidad de aprendizaje y ofrecer una alternativa didáctica en la labor del profesor.

Dicho lo anterior, surge la siguiente pregunta ¿Cuáles son los elementos teórico-prácticos con los que llega el estudiante al momento de cursar esta unidad de aprendizaje? y ¿qué enfoque (analógico, digital) es el impartido en su formación académica? Estas preguntas surgen debido a que para crear un manual de prácticas que trate las señales digitales, se debe partir de las bases matemáticas y las herramientas computacionales conocidas por los estudiantes. Así mismo, es sabido que para comprender y manipular las señales digitales, se debe conocer y manejar primero las señales analógicas.

A lo largo de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica (I.C.E.), el alumno cursa una serie de unidades de aprendizaje que están relacionadas con las señales analógicas y digitales. La tabla 1 muestra algunas de las unidades de aprendizaje que el estudiantado ha cursado hasta séptimo semestre bajo el enfoque analógico-digital.



U.A. * útiles para el análisis Analógico	U.A. útiles para el análisis Digital
Bases matemáticas: • Cálculo diferencial e integral • Transformada de funciones • Ecuaciones diferenciales	Bases Matemáticas: • Variable compleja
U.A. de aplicación: • Circuitos de C.A. y C.D. • Teoremas de circuitos eléctricos • Análisis de transitorios • Dispositivos • Comunicaciones analógicas • Electrónica lineal • Señales de control clásico. • Electroacústica	U.A. de aplicación: • Electrónica digital • Comunicaciones digitales • Micro-controladores • <i>Procesamiento digital de señales</i> • Espacio de estados
U.A. comunes a ambos enfoques:	
Bases Matemáticas • Fundamentos de álgebra • Probabilidad y estadística	Bases de programación • Fundamentos de programación • Programación orientada a objetos • Estructuras y bases de datos • Análisis numérico.

U.A. Complementarias por parte de:

- Academia de Humanidades
- Academia de Economía
- Academia de Química
- Academia de Física

Tabla 1. Panorama general de la formación del ingeniero en I.C.E. de la E.S.I.M.E. Zacatenco.

Por otra parte, para el desarrollo por parte del estudiantado de las prácticas propuestas en el presente trabajo, es necesario tener bases sólidas de programación ya sea lenguaje c, c++, etc. ya que esto permite y en cierto grado facilita el uso del paquete MATLAB (abreviatura de MATRIX LABORATORY [1]) con el que se promueve el desarrollo de dichas prácticas.

*U.A. : unidades de aprendizaje



A continuación se hace una lista de las unidades de aprendizaje de programación que forman parte del tronco común y son el antecedente directo para desarrollar las prácticas de laboratorio que este trabajo propone, estas son:

- Fundamentos de programación.
- Programación orientada a objetos.
- Estructuras y bases de datos.
- Análisis numérico.

Cada unidad de aprendizaje mencionada anteriormente permite al estudiante un buen dominio del paquete MATLAB, por mencionar algunos ejemplos: La programación orientada a objetos permite que el estudiante emplee y explote las propiedades de los objetos en cuestión, tomando en cuenta una variable como un objeto y no como un simple valor, de esta manera es como MATLAB ha sido programado. Otro ejemplo es la unidad de aprendizaje de Estructuras y Bases de Datos que permite una buena comprensión de los mapas de memoria y de cómo es almacenada la información en la computadora, hecho que es aprovechado por MATLAB pues da facilidades que evitan el uso de apuntadores a localidades de memoria para el uso de matrices los cuales sino son correctamente utilizados pueden generar errores de sistema inclusive. Así mismo la unidad de aprendizaje de Análisis numérico la cual resulta ser probablemente, el mayor acercamiento entre las matemáticas y la computación dentro de la carrera de I.C.E., ya que permite al estudiante entender el propósito y funcionamiento de muchas herramientas en MATLAB. Este paquete es una herramienta que simplifica el uso de los distintos algoritmos como la transformada rápida de Fourier. Y quien suscribe, sostiene que Fundamentos de programación es la antesala de todas las unidades de aprendizaje descritas y por lo tanto un pilar en el uso de MATLAB dentro de esta carrera, esto puede ser comprobado al revisar el plan de estudios de la carrera de I.C.E. [2], en los planes correspondientes a las unidades de aprendizaje de programación se observa que para entender las unidades de aprendizaje de programación existen tópicos básicos como el uso de variables necesarios para entender las unidades de aprendizaje que siguen a fundamentos de programación..

2.2 MATLAB como plataforma a utilizar

Habiendo descrito las unidades de aprendizaje correspondientes a programación, es claro que los alumnos que cursan el séptimo semestre poseen las bases suficientes como para usar las capacidades del paquete MATLAB, mismo que ha sido seleccionado como plataforma a utilizar por el estudiantado para la resolución de las prácticas propuestas. Cabe destacar que el uso de esta paquetería tiene cierta notoriedad entre maestros, academias y estudiantes de ICE al igual que en otras universidades [1], no obstante algunos profesores utilizan también otros paquetes como Maple o Mathematica, en el caso del estudiantado, éste está familiarizado con el uso de c y c++; lo anterior muestra una ventaja, pues la herramienta utilizada en estas prácticas (MATLAB) tiene una sintaxis similar a la de c y c++, además ofrece comandos intuitivos fáciles de entender y no tan complejos, ideales para personas que estudian una ingeniería, a diferencia de paquetes que presentan una mayor complejidad.

La herramienta utilizada permite un fácil manejo de matrices y un uso sencillo de las distintas herramientas, no es necesario enfrentarse a las dificultades de cargar paquetes para graficar o realizar otras actividades, esto ahorra tiempo y facilita la elaboración de las prácticas descritas;



MATLAB permite, en todo momento, revisar la documentación de las distintas funciones y además el uso de la ayuda para identificar el correcto uso del paquete. Otro punto a destacar es que en este instituto se cuenta con la licencia para utilizar el paquete, lo cual impacta de manera positiva en el aspecto económico, por todas estas razones es que se ha preferido el uso de MATLAB para el desarrollo de las diez prácticas correspondientes a la unidad de aprendizaje de Procesamiento Digital de Señales.

2.3 PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES (PDS):

La unidad de aprendizaje de PDS reafirma un conjunto de herramientas matemáticas (Transformada Z y Transformada de Fourier) para realizar el tratamiento de señales digitales, una señal digital es aquella que está conformada por muestras discretas, es decir que solo está definida para ciertos valores en el intervalo en el que esté definida y también se le atribuye un valor discreto de amplitud.

Dentro de esta unidad de aprendizaje, el alumno hace uso de las transformadas de funciones y al final del curso tiene las herramientas necesarias para realizar el diseño de filtros digitales.

2.4 ESTRUCTURA DEL MANUAL

Para la elaboración de este manual, se establecieron ciertos puntos comunes a cada práctica que permitan contar con una estructura que describiera, argumente y apoye la resolución de las prácticas, a continuación se enumeran y se describen a cada uno de ellos:

I. Objetivos.

En esta sección se describen los objetivos particulares y generales que se buscan alcanzar. Es la base en donde la que profesores y estudiantes cuentan para determinar qué puntos de la teoría se verán reforzados y por tanto deberán ser cubiertos para la resolución de la práctica.

II. Introducción.

Aunque esta información se da en las horas de teoría, se busca dar una breve introducción con el objetivo de estandarizar las prácticas y por lo tanto se debe partir de una misma base, es por ello que se proporciona información que sirva de apoyo.

III. Información adicional.

El Procesamiento Digital de Señales es una rama del conocimiento que gracias a los avances de la tecnología y las necesidades de las personas ha crecido enormemente, es por ello que en esta sección el objetivo es brindar información que acerque al estudiante a los avances recientes del procesamiento digital de señales. En cada práctica se buscaron temas que se relacionen con los temas propios de cada práctica.

IV. Instrucciones.



Esta sección pretende proveer toda la información necesaria para que los estudiantes resuelvan la práctica, se parte de una introducción y los antecedentes vistos en la parte de teoría para delimitar los ejercicios a realizar en cada práctica.

V. *Observaciones y Toolbox.*

Permiten en conjunto dar recomendaciones y notas importantes a los estudiantes, en el caso del Toolbox, se diseñó como una guía de los comandos a utilizar en el desarrollo en cada práctica, ya que al contar con los comandos adecuados, es fácil acceder a la ayuda y documentación que MATLAB ofrece para su uso adecuado.

VI. *Requisitos de entrega.*

Esta parte indica los puntos que se proponen en cada práctica para que los estudiantes generen el reporte correspondiente.

VII. *Cuestionario.*

Consiste de cinco o diez preguntas (dependiendo de la práctica) que sirven para concluir la práctica, su resolución implica la necesidad de resolver la práctica.

Expuestos los puntos comunes a considerar en cada práctica, se procede a dar una serie de recomendaciones al profesor para utilizar el manual que posteriormente será desarrollado.

2.5 RECOMENDACIONES DE USO DEL MANUAL

En un grupo estándar se cuenta con alrededor de treinta estudiantes, se propone la asignación de 10 equipos de trabajo, siendo tres integrantes la cantidad máxima de alumnos que permite un correcto desempeño de todos los estudiantes. Cabe mencionar que todas las recomendaciones que se hacen quedan a criterio del profesor, quién podrá delimitar puntos a favor y puntos en contra del uso de dichas recomendaciones y por tanto decidir si le es favorable su uso. Dado que el tiempo a veces no es suficiente para abarcar todos los temas, se sugiere al profesor no omitir las siguientes prácticas, las cuales son una parte muy importante en la formación académica del estudiante:

- Práctica II: transformada z.
- Práctica V: serie de Fourier en tiempo discreto.
- Práctica VI: transformada discreta de Fourier.
- Práctica IX: diseño de filtros digitales IIR.
- Práctica X: proyecto de aplicación.

Las prácticas anteriores resultan de gran apoyo para complementar la teoría vista en clase, es por ello que se recomienda no omitirlas. En cuanto a los proyectos de aplicación, se han llevado a cabo tres propuestas (desarrolladas en las prácticas 10A, 10B y 10C) y se sugiere alternarlos cada semestre de tal manera de no ser repetitivos.



IPN





CAPÍTULO III

CONTENIDO TEMÁTICO: CONCEPTOS BÁSICOS



En los capítulos 2, 3 y 4 se describe el contenido temático de la unidad de aprendizaje Procesamiento Digital de Señales y la manera en que las prácticas propuestas en cada unidad apoyan a la teoría vista en clase.

La unidad de aprendizaje de PDS tiene asignadas 81 horas durante el semestre, de las cuales 54 horas corresponden a teoría y 27 horas corresponden al laboratorio. Para el caso de laboratorio se proponen diez prácticas, cuatro en la unidad uno, tres en la unidad dos y finalmente dos en la última unidad. En este capítulo se hará mención de cada una de las tres unidades por separado, haciendo una descripción de cómo las prácticas propuestas actúan como apoyo para la teoría vista en clase.

3.1 UNIDAD I. Conceptos Básicos de las Funciones Discretas en tiempo.

De acuerdo a los planes y programas de estudio de la unidad de aprendizaje de Procesamiento Digital de Señales (PDS) [3] de la carrera de I.C.E de ESIME Zacatenco del IPN, el objetivo de la unidad I es (ESIME, 2004): “*análisis de las señales discretas a través de la transformada z para su mejor aprovechamiento y óptima aplicación*”. La estrategia didáctica busca la participación de los alumnos así como también la integración de los mismos en equipos de trabajo para la resolución de ejercicios y prácticas, de esta manera el plan de estudios busca que el laboratorio tenga “*una mayor comprensión y comprobación de lo impartido en clase, por parte del alumno, bajo la supervisión y coordinación del profesor*”. Para poder hacer referencia de cómo se pretende lograr lo anterior, es necesario hacer mención de los temas vistos en la unidad I y describir la unidad:

- 1.1 *Concepto de procesamiento digital de señales.*
- 1.2 *Esquema del procesamiento digital de señales y conversión de analógico a digital y viceversa.*
- 1.3 *Formas de definición de señales discretas en tiempo.*
- 1.4 *Definición de sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.*
- 1.5 *Ecuaciones de diferencia.*
- 1.6 *Transformada Z directa.*
 - 1.6.1 *Método de definición.*
 - 1.6.2 *Método integral de contorno.*



- 1.6.3 *Aplicaciones de las propiedades de la transformada Z, linealidad, desplazamiento y escalamiento en tiempo, diferenciación e integración en tiempo, desplazamiento y escalamiento en frecuencia, diferenciación e integración en frecuencia, convolución en tiempo y frecuencia.*
- 1.7 *Función de transferencia discreta, rdc, polos y ceros.*
- 1.8 *Causalidad y estabilidad.*
 - 1.8.1 *Transformada Z inversa.*
 - 1.8.2 *Método de expansión en serie de potencias*
 - 1.8.3 *Método de expansión en fracciones parciales.*
 - 1.8.4 *Método integral de inversión.*
- 1.9 *Respuesta en frecuencia.*

La unidad uno es fundamental para la unidad de aprendizaje PDS, ya que en ella se puntualizan las características de las señales digitales para su posterior uso en ésta y las otras dos unidades. Ésta y la segunda unidad tienen como objetivo el uso y comprensión de la herramienta matemática necesaria para su aplicación en el procesamiento digital de señales; en el caso de la unidad I, la herramienta matemática en cuestión es la transformada z ; dicha transformada es el recurso matemático que es análogo a la transformada de Laplace para el tiempo continuo. La transformada z , para una señal digital dada, permite obtener una expresión unívoca a la señal que a su vez hace más fácil manipular la señal original; por ejemplo, empleando la transformada z es más sencillo obtener la función de transferencia de un sistema (relación entrada-salida), y utilizarla en la resolución de ecuaciones en diferencia que caracteriza a dicho sistema y posteriormente recuperara la señal resultante en el dominio del tiempo discreto mediante la transformada z inversa.

En términos matemáticos, el proceso para obtener la transformada z de una señal digital, parte de la introducción de una secuencia (que es la representación matemática para una señal digital) en la expresión matemática que define a la transformada z , generando así una serie geométrica, la cual, al aplicar el Criterio d' Alembert [7], es posible conocer para qué valores de z la serie geométrica converge, de modo que al desarrollar dicha serie se obtiene una expresión algebraica en el dominio del plano complejo z con su correspondiente región de convergencia. Más adelante se ilustrará este proceso en el desarrollo de las prácticas referentes a la primera unidad.

Una vez que se conoce el proceso matemático implícito en el cálculo de la transformada z , es entonces que se procede a analizar las diferentes propiedades que permiten calcular más fácilmente la transformada z de otras señales, sin embargo, cuando se llega a la parte de transformada z inversa, será posible notar que la transformada de una señal potencia, como lo puede ser una exponencial discreta, resulta muy útil para poder encontrar la señal original que se relaciona unívocamente con una transformada z , dado que los métodos que permiten obtener expresiones algebraicas para la señal original, estos métodos son: el método de fracciones parciales y el método de la integral de inversión, los cuales generalmente arrojan un resultado en términos de funciones potencia.



Las prácticas propuestas para la unidad I son las siguientes:

- I. Digitalización de una señal analógica
- II. Transformada z
- III. Propiedades de la transformada z
- IV. Transformada z inversa

El objetivo de la primera práctica es mostrar al estudiante a las características de las señales discretas en el tiempo y el proceso que sufre una señal analógica para ser digitalizada, reforzando así la primera parte de la unidad. Las siguientes tres prácticas analizan la transformada z , sus propiedades y el proceso inverso para recuperar la señal digital mediante el uso de MATLAB. Aunque en la primera práctica también se utiliza MATLAB, se destaca su uso en las siguientes tres prácticas ya que es más evidente en ellas como éste paquete permite al estudiante resolver ejercicios similares o iguales a los vistos en clase, constituyéndose así en una poderosa herramienta que le permite al estudiante contar con un método alternativo para realizar y verificar ejercicios vistos en clase o bien resolver nuevos ejercicios y contar con un método alternativo, es decir el método computacional, para poder culminar satisfactoriamente la unidad y sus correspondientes temas.

Cabe destacar que las prácticas desarrolladas en este trabajo de tesis fueron previamente diseñadas y aplicadas a distintos grupos de PDS. La información y las evidencias recabadas permitió encontrar elementos valiosos en el diseño y elaboración de las prácticas que formarían parte de este manual. Se vio la pertinencia de contar una introducción clara, información adicional y una caja de herramientas que contenga los comandos elementales (a veces difíciles de encontrar) para realizar las labores correspondientes a cada una de las prácticas, se encontró que era necesario incluir instrucciones claras para los reportes de entrega y desarrollos y un cuestionario que permitiera evaluar los conocimientos adquiridos en el laboratorio.

3.2 Práctica 1: Digitalización de una señal analógica.

OBJETIVO GENERAL:

El alumno convertirá las señales analógicas a digitales (y viceversa) utilizando el programa MATLAB.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) Identificar las diferentes funciones básicas definidas en el tiempo discreto
- ii) Comparar las funciones básicas digitalizadas con su contra parte continua



INTRODUCCIÓN:

A partir de los avances tecnológicos en la electrónica, computación y otras ramas del conocimiento afines, se tiene la necesidad de manipular señales encontradas en la naturaleza o generadas de forma sintética, por ejemplo mediante circuitos, sintetizadores, equipo de control, etc. En un principio los dispositivos electrónicos eran constituidos por hardware cuyo costo resultaba ser demasiado alto y operaban con señales analógicas. A partir del siglo XX, la electrónica y la informática se han desarrollado muy rápidamente, abaratando costos y haciendo más eficientes a los sistemas encargados de la manipulación de señales, a tal grado que los circuitos digitales han hecho posible llevar a cabo tareas y funciones de tratamiento de señales digitales, las cuales normalmente son complejas y con un alto costo de implementación bajo el uso de la circuitería analógica. El uso de hardware digital ha hecho más barato y fiable el tratamiento de señales.

Un punto que ha marcado gran progreso en el tratamiento de señales digitales ha sido el uso y desarrollo de software, el cual ha hecho posible que la modificación de las funciones en el procesamiento digital de señales resulte ser más fácil a diferencia de las hechas vía hardware. El paquete MATLAB permite aplicar distintos métodos para manipular señales discretas y generar filtros digitales.

Existen distintos tipos de señales, las cuales se pueden clasificar por su dimensión, es decir el número de variables independientes que han de determinar la función que represente a la señal, de tal forma que esta puede ser de 1, 2, 3 o múltiples dimensiones, ejemplos de ello son: la voz (1D), una imagen blanco y negro (2D: posición 'x' y 'y'), un video en blanco y negro (3D: posición 'x', 'y' y tiempo) o un video a color (multidimensional. Cada píxel con posición 'x', 'y' posee tres canales de color).

Otro tipo de clasificación de las señales en base a su naturaleza discreta o continua es la siguiente:

- a) señal analógica: señal en tiempo continuo que posee valores continuos.
- b) señal digital: es una señal en el tiempo discreto con valores de amplitud discretos
- c) señal de datos muestreados: es una señal en el tiempo discreto con amplitudes continuas.
- d) señal cuantificada: esta señal tiene valores definidos para el tiempo continuo con amplitudes de valores discretos.

Cabe destacar, que en el caso de las señales digitales, estas son representadas matemáticamente por medio de una sucesión o secuencia.



Teorema del muestreo

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal se muestrea a una frecuencia $F_s > 2F_{max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ puede recuperarse en forma exacta a partir de los valores de sus muestras. La frecuencia de muestreo crítica igual a $2B$ se conoce cómo frecuencia de Nyquist¹.

Si el muestreo es natural, la señal encargada de muestrear es un tren de impulsos de duración finita (T_0) y amplitud unitaria, como se muestra en la tabla 2. En el muestreo ideal se emplean series de funciones deltas de Dirac para modelar los impulsos de muestreo.

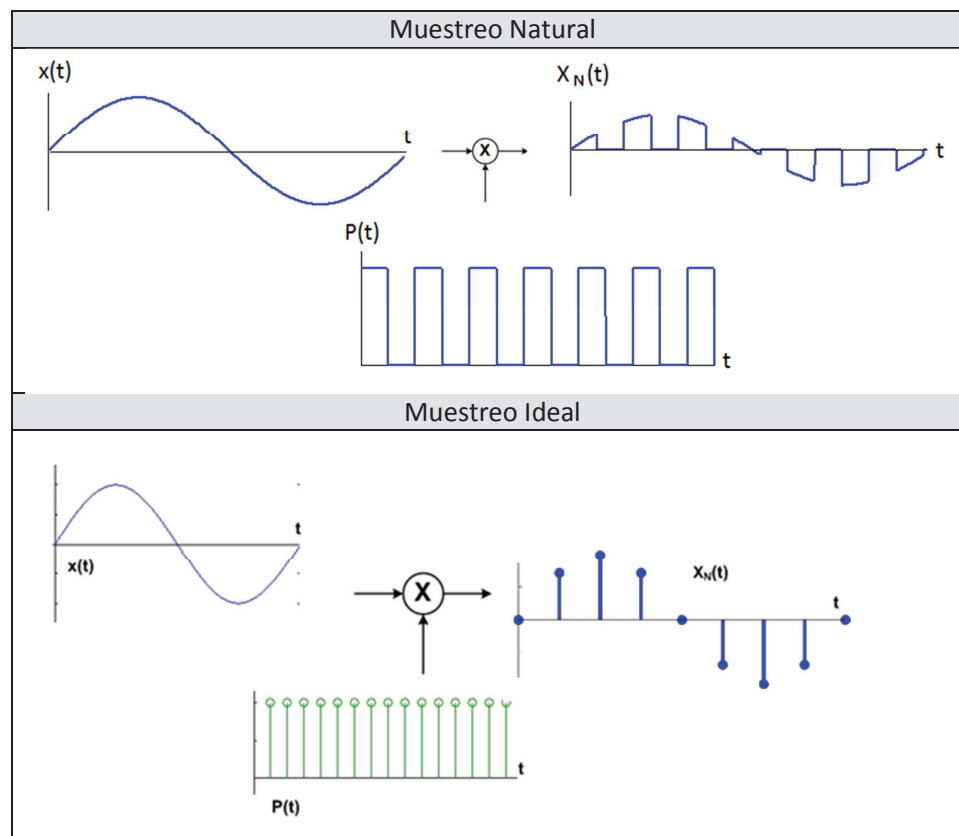


Tabla 2. Muestreo Natural e Ideal.

1 Teorema de muestreo de Nyquist: para poder replicar con exactitud una forma de onda, es decir con la condición de que sea matemáticamente reversible el proceso, es necesario que la frecuencia de muestreo sea superior al doble de la máxima frecuencia a muestrear.



La tabla 3 ilustra la comparación entre la señal analógica y la señal digital, así como los diferentes procesos que se pueden emplear para digitalizar la señal analógica.

SEÑAL ANALÓGICA	VS	SEÑAL DIGITAL
gráfica de la función seno continua		gráfica de la función seno discreta
Analíticamente: $f(t) = \text{sen}(\omega t)$ $f(t) _{t=nT} = \text{sen}(n\omega T) = x[n]$		
Electrónicamente:		
Computacionalmente: <pre>t=0:(2*pi)/100:8; Se especifican muestras en intervalos de 2*pi/100, acercándose al tiempo continuo en el parámetro t y=sin(t*pi/4); plot(t,y);</pre> <pre>n=[0:1:8]; %en este caso las muestras para el parámetro n tienen un intervalo de una unidad x=sin(n*pi/4) plot(n,x,'o');</pre>		

Tabla 3. Señal Analógica Vs Señal Digital



INFORMACIÓN ADICIONAL:

El paquete MATLAB trabaja con muestras discretas para graficar y efectuar diversas operaciones, se puede realizar la representación de una señal en tiempo discreto especificando al programa los intervalos y el argumento para que en cada muestra se grafique el correspondiente símbolo (de acuerdo al argumento: 'o', 's', '*', etc.) en vez de una línea, ya que en la práctica lo que en realidad se tiene son puntos.

Durante el proceso de digitalización se pierde parte de la información de la señal, aunado a la compresión de la información; por ejemplo, en reproductores de música analógicos como tornamesas, algunas personas afirman que la calidad de la música o una grabación resulta mayor; hoy en día se siguen comercializando audio en discos de acetato, dadas las cualidades que presentan.

INSTRUCCIONES

Grafica cada una de las siguientes señales, posteriormente digitalízalas matemáticamente, tabula los valores de cada una con al menos 10 valores y grafica la señal digitalizada resultante.

Nota: Procura que los intervalos: horizontal y vertical sean los mismos para la señal en el dominio del tiempo continuo 't' y del tiempo discreto 'n'.

- a) $x(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right);$ 1)
- b) $x(t) = a^{0.29t};$ para $a=2;$ 2)
- c) $x(t) = a^{0.3t};$ para $a=1/2;$ 3)
- d) $x(t) = u(t) = \begin{cases} -1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases};$ 4)
- e) $x(t) = t;$ 5)

OBSERVACIONES:

- i) Para digitalizar matemáticamente se sugiere utilizar la siguiente convención en la nomenclatura:

$$f(t) \rightarrow f(nT) \rightarrow x[n] \quad 6)$$

- ii) En el caso de las señales rampa y escalón crear una función que a partir de los valores de entrada necesarios, retorne los valores correspondientes a una señal causal rampa o escalón digitalizados según sea el caso, dentro del cuadro 2 se encuentran los comandos útiles para realizar el ejercicio, mismos que pueden ser referenciados en la ayuda de MATLAB mediante la sentencia "help comando".
- iii) Utilizar una escala del cero al ocho para el eje 'x' y ajustar el eje 'y' a conveniencia, graficar el periodo fundamental



- iv) En la tabla cuatro se encuentran los comandos que se deberán emplear para graficar cada una de las señales anteriores.

LISTA DE COMANDOS	
plot();	Argumentos de interés: "LineWidth", "MarkerSize", "MarkerFaceColor".
set();	Argumentos de interés: "gca", "XTick", "XTickLabel".
saveas();	GCF
axis();	
function	

Tabla 4. Lista de comandos 1.

DESARROLLO:

a) Función Coseno

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \rightarrow f(t)|_{t=nT} = f(nT) = \cos\left(\frac{\pi nT}{4}\right) \rightarrow x[n] = \cos\left[\frac{n\pi}{4}\right] \quad 7)$$

n	x[n]
0	1
1	0.7071
2	0
3	-0.7071
4	-1
5	-0.7071
6	0
7	0.7071
8	1

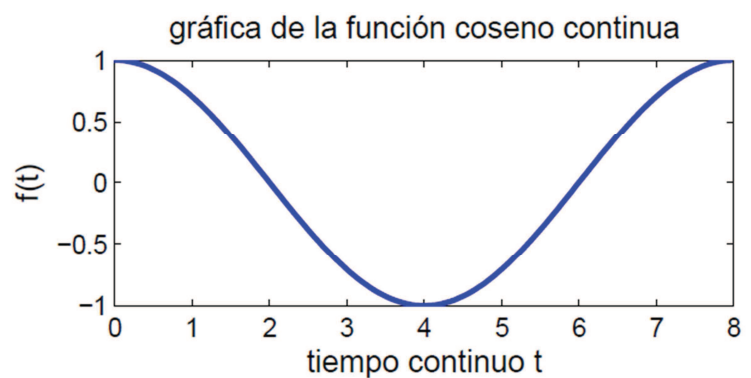


Figura 1: señal 'a' continua.

Tabla 5: digitalización de la función 'a'

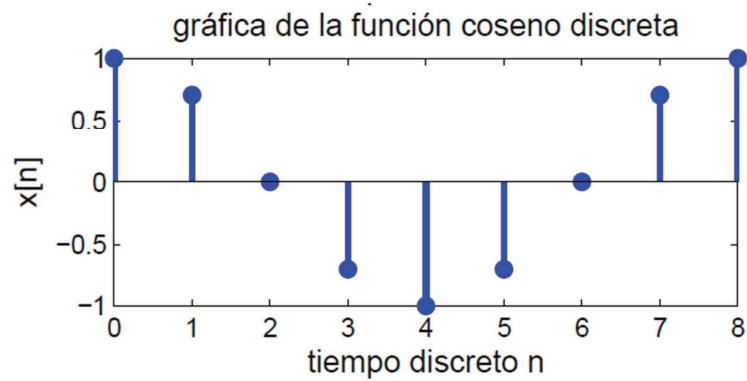


Figura 2: señal 'a' digitalizada.

b) Función exponencial creciente

$$f(t) = 2^{0.29t} \rightarrow f(t)|_{t=nT} = f(nT) = 2^{0.29nT} \rightarrow x[n] = 2^{0.29n} \quad 8)$$

n	x[n]
0	1
1	1.22
2	1.49
3	1.82
4	2.23
5	2.73
6	3.34
7	4.08
8	5

Tabla 6: digitalización de la función 'b'

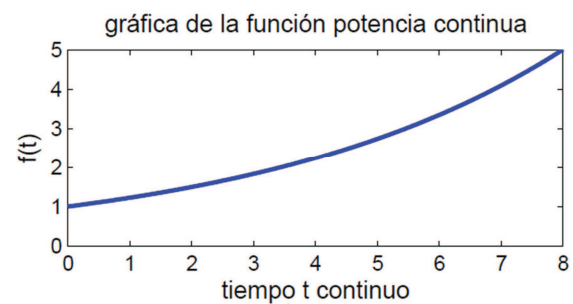


Figura 3: señal 'b' continua.

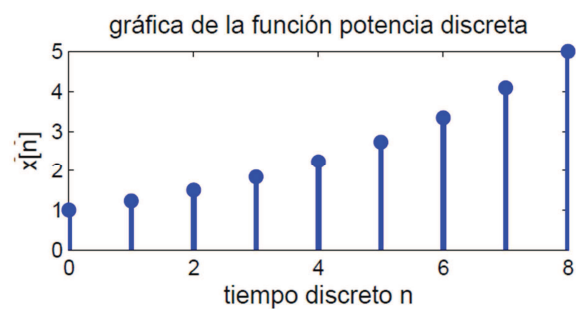


Figura 4: señal 'b' digitalizada.



c) Función potencia decreciente

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3t} \rightarrow f(t)|_{t=nT} = f(nT) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3nT} \rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3n} \quad 9)$$

n	x[n]
0	1
1	0.81
2	0.65
3	0.53
4	0.43
5	0.35
6	0.28
7	0.23
8	0.18

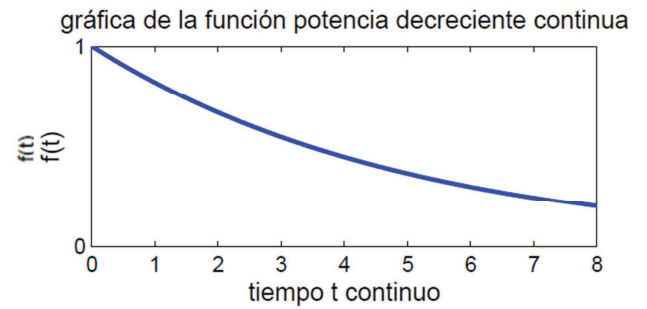


Figura 5: señal 'c' continua.

Tabla 7: digitalización de la función 'c'

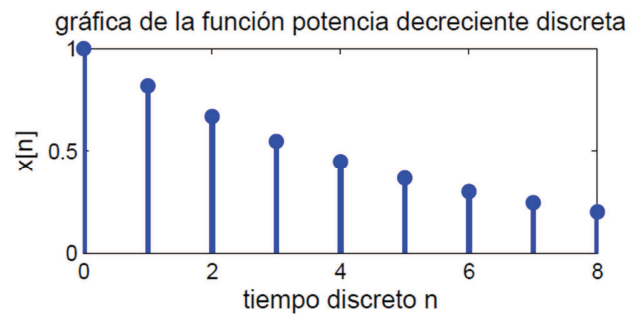


Figura 6: señal 'c' digitalizada.

d) Función escalón unitario

$$f(t) = u(t) \rightarrow f(t)|_{t=nT} = f(nT) = u(nT) \rightarrow x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad 10)$$

n	X[n]
-2	0
-1	0
0	0
1	1
2	1
3	1
4	1

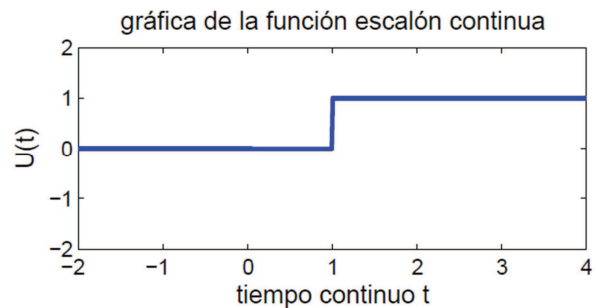
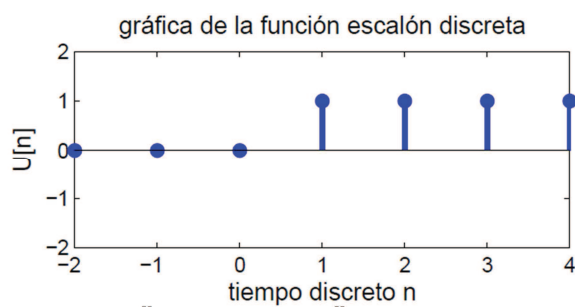


Figura 7: señal 'd' continua.

Tabla 8: digitalización de la función 'd'



e) Función rampa

$$f(t) = t \rightarrow f(t)|_{t=nT} = f(nT) = nT \rightarrow x[n] = n \quad 11)$$

n	x[n]
-2	0
-1	0
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

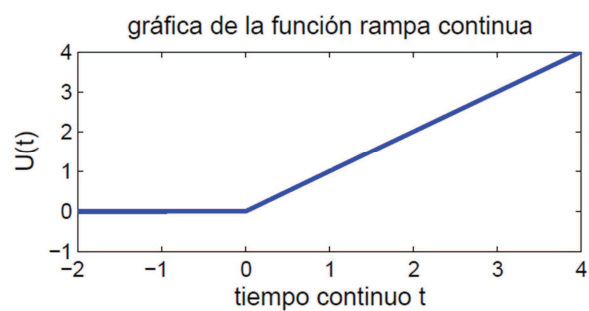


Figura 9: señal 'e' digitalizada.

Tabla 9: digitalización de la función 'e'

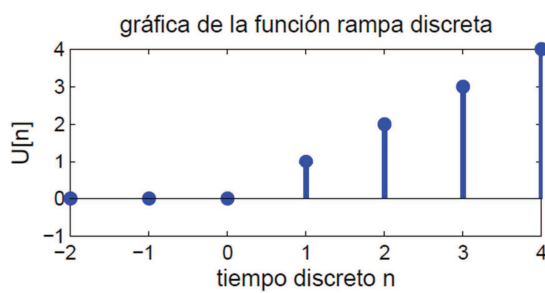


Figura 10: señal 'e' digitalizada.



REQUISITOS DE ENTREGA

- Al final, elabora un reporte con todas las gráficas obtenidas en MATLAB y anexa la programación empleada en cada caso y compara la gráfica de la señal digital calculada mediante el software contra la obtenida de manera tabular.
- Modifica el periodo de la función coseno del inciso a, a un periodo $\pi/8$

f) Función Coseno

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{8}\right) \rightarrow f(t)|_{t=nT} = f(nT) = \cos\left(\frac{\pi nT}{8}\right) \rightarrow x[n] = \cos\left[\frac{n\pi}{8}\right] \quad 12)$$

n	x[n]
0	1
1	0.9238
2	0.7071
3	0.3826
4	0
5	-0.3826
6	-0.7071
7	-0.9328
8	-1

Tabla 10: digitalización de la función 'f'

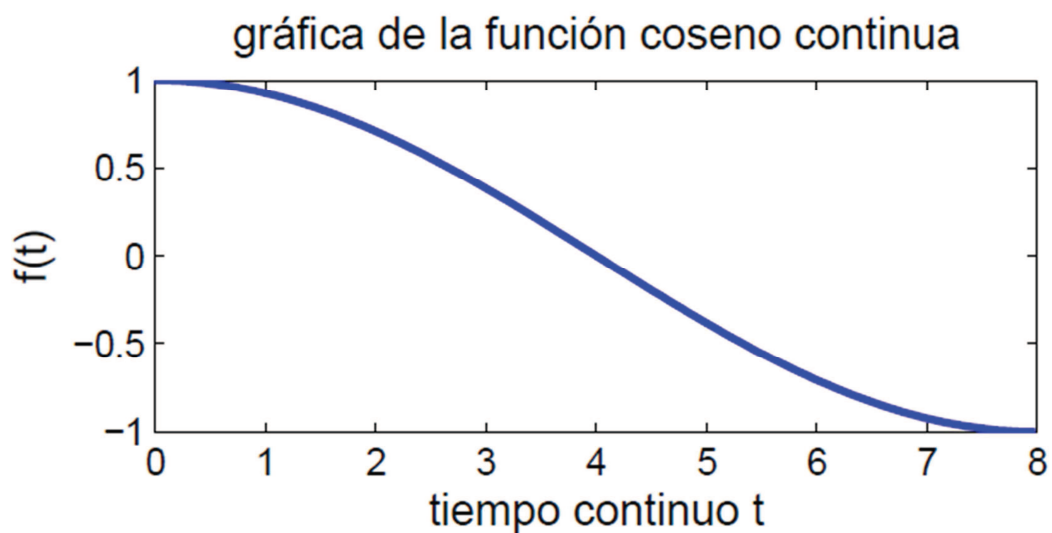


Figura 11: señal 'f' continua.

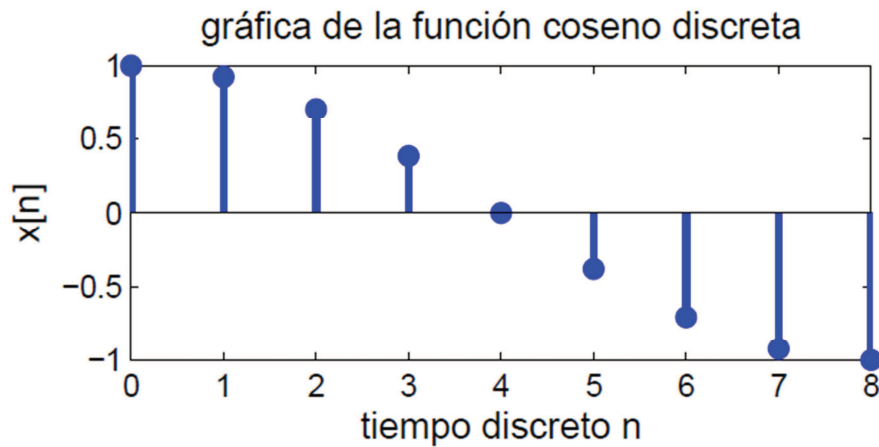


Figura 12: señal 'f' digitalizada.

CUESTIONARIO:

- 1.- Explica el proceso empleado para revertir el proceso o recuperar la señal analógica partiendo de la señal digital.
- 2.- Al digitalizar la señal analógica, se pierde parte de la señal ¿es posible recuperar esa información perdida? ¿Afecta este hecho la calidad de la nueva señal digital?
- 3.- Investiga la forma en cómo se cuantifica una función digital.
- 4.- ¿Cuándo varías el periodo en las funciones trigonométricas, que cambios fundamentales se presentan en las gráficas?
- 5.- ¿Qué tipo de dato de retorno usaste en las funciones creadas (rampa y escalón) para poder graficar en MATLAB, cómo si se tratara de una función ya establecida como fue el caso del seno y coseno?
- 6.- En sus palabras, indique ventajas y desventajas de las señales analógicas y digitales
- 7.- Indique que utilidad tiene hacer la conversión analógico-digital en la ingeniería, e indique una aplicación.
- 8.- ¿Por qué las señales digitales han sustituido mayormente a las señales analógicas?
- 9.- ¿El uso de software simplifica el tratamiento de las señales?
- 10.- Elabore una breve conclusión de los datos reportados en la práctica



3.3 Práctica 2: Transformada z.

OBJETIVO GENERAL:

Conocer la Transformada z de algunas funciones básicas como son: seno, coseno, rampa, escalón y exponencial.

OBJETIVO PARTICULAR:

El alumno calculará analítica y computacionalmente la transformada z de algunas señales digitales básicas e identificará el comportamiento de cada señal de manera gráfica en el tiempo discreto “n” y su correspondiente diagrama de polos y ceros en el plano complejo z.

INTRODUCCIÓN

La Transformada z es una herramienta matemática que permite el tratamiento de señales digitales con mayor facilidad al convertir una señal definida en el tiempo discreto a una representación en el dominio de la frecuencia compleja. La transformada z parte de una señal digital representada por una sucesión o una secuencia que es convertida en una serie, a continuación su definición:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad 13)$$

Transformada z bilateral

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad 14)$$

Transformada z unilateral

En donde el núcleo, también llamado kernel, de la transformada z $X(z)$ es z^{-n} .

La transformada z unilateral se emplea para señales causales, que se encuentran definidas en valores de $n \geq 0$, mientras que la transformada z bilateral corresponde a señales no causales, definidas en $n < 0$.

La transformada z unilateral se reduce a resolver una serie geométrica, en cuyo caso se debe especificar para que valores de z, la serie converge (ROC)², situación que garantiza la existencia de la transformada z. Al existir una única secuencia $x[n]$ para la cual $Z\{x[n]\} = X(z)$, la relación entre una secuencia $x[n]$ y su transformada z: $X(z)$ es unívoca [6]. Ésta relación uno a uno se



denota usualmente por medio de una flecha bidimensional $x[n] \leftrightarrow X(z)$ y se dice que $x[n]$ y $X(z)$ constituyen un par de transformadas z o par básico.

Otro aspecto importante a notar es que, como se ilustrará en el ejemplo, la función generadora es un operador lineal, propiedad que también se conserva en la transformada z .

2 ROC por sus siglas en ingles significa región de convergencia, y corresponde a la región dentro del plano complejo para la cual la transformada z existe.

A manera de ejemplo, se calculará matemáticamente la transformada z de una señal exponencial creciente definida en el dominio del tiempo discreto " n ", ver figura 13 para ilustrar los aspectos importantes de dicha herramienta.

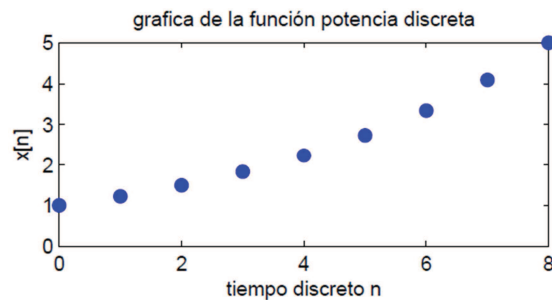


Figura 13: señal potencia digitalizada.

La señal a transformar es:

$$x[n] = a^n, \text{ con } a = 2 \text{ \& } n \geq 0 \quad 15)$$

Debido a que la señal es causal, se usa la definición de la transformada z unilateral para el cálculo de la transformada.

Aplicando la definición se tiene:

$$Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{Z}\right)^n \quad 16)$$

Como se puede observar, mediante el uso de las leyes de los exponentes, se llega a una serie geométrica, en donde $r = \frac{a}{Z}$, la ecuación 16 nos queda como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{Z}\right)^n \quad 17)$$

Una vez obtenida la serie geométrica, se deben encontrar los valores de " z " para los cuales la serie converge, esto se logra aplicando el criterio d'Alembert [7], descrito y aplicado en la ecuación 18:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r^{n+1}}{r^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^{n+1}}{\left(\frac{a}{z}\right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^n \left(\frac{a}{z}\right)^1}{\left(\frac{a}{z}\right)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a}{z} \right| = \left| \frac{a}{z} \right| \quad (18)$$

El criterio menciona que para que la serie converja, el valor del límite anterior debe ser menor a uno, ya que en caso contrario, la serie diverge, por lo tanto:

$$\left| \frac{a}{z} \right| < 1 \rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \rightarrow |z| > |a| ; ROC \quad (19)$$

Dicha región "ROC" (por sus siglas en inglés: "Region of Convergence"), indica todos los valores de z para los cuales la transformada existe.

Finalmente, para obtener la Transformada z , se desarrolla la serie geométrica, la cual se define como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right| = \frac{1}{1 - r} \\ \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n &= \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \end{aligned} \quad (20)$$

Así la transformada z de a^n es:

$$Z \{a^n\} = \frac{z}{z - a} \quad \forall |z| > |a| \quad (21)$$

Sustituyendo el valor de $a = 2$ en la ecuación 21 se obtiene:

$$Z \{2^n\} = \frac{z}{z - 2} \quad \forall |z| > |2| \quad (22)$$

Nota: Existen varias formas de graficar la Transformada z tales como: espectro de magnitud, espectro de fase, forma compleja y diagrama de polos y ceros, sin embargo, por su utilidad, se empleará ésta última.

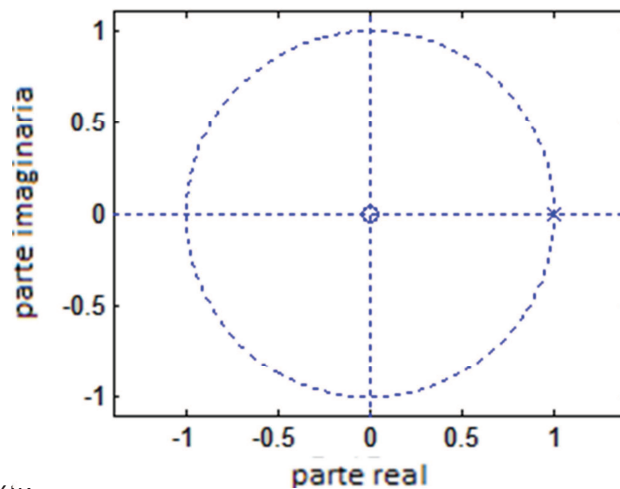


Figura 14: Diagrama de polos y ceros para $z\{x[n]\}$



INFORMACIÓN ADICIONAL

Una revisión histórica sobre el surgimiento de la transformada z , indica que su aparición se dio en los sistemas de control de datos muestreados. A éste respecto, las aplicaciones de los sistemas de datos muestreados aparecieron mucho antes que el desarrollo de la teoría. De hecho, la primera aplicación fue desarrollada por Abraham-Louis Breguet en París alrededor de 1793 [9].

La teoría de los sistemas de datos muestreados fue principalmente desarrollada durante la segunda guerra mundial (1939-1945) enfocado a los sistemas de radar. Durante este periodo, científicos en los Estados Unidos e Inglaterra trabajaron en desarrollar esta teoría. Lo cual indica que dicha teoría, fue hecha por varios autores, cada uno de ellos contribuyó de una u otra manera en varios grados en la teoría. Es el trabajo colectivo de muchos años que consolida o forma las bases de la teoría de sistemas discretos. [9]

INSTRUCCIONES

Para las siguientes señales discretas, calcular analíticamente y mediante el CAS (sistema de álgebra computarizado por sus siglas en inglés) de MATLAB la transformada z , a su vez trazar mediante el uso de MATLAB el diagrama de los polos y ceros de la expresión resultante apoyándose en los resultados que el CAS provea.

a) $x[n] = a^n$ para el caso cuando $a = \frac{1}{2}$; 23)

b) $x[n] = u[n] = \begin{cases} 1 & ; n \geq 0 \\ 0 & ; n < 0 \end{cases}$; 24)

c) $x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; 25)

d) $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; 26)

e) $x[n] = n$; 27)

OBSERVACIONES:

- i) Apoyarse en el cuadro 3 para realizar el trabajo.
- ii) Es necesario que los ceros de la función estén representados por círculos vacíos mientras que los polos correspondan a círculos rellenos, se da libertad al estudiante a apoyarse de la creación de funciones que eviten que el trabajo resulte repetitivo.



LISTA DE COMANDOS

plot();
Argumentos de interés: "LineWidth", "MarkerSize", "MarkerFaceColor".
roots();
zplane();
Argumentos de interés: "GCF"
axis();
syms
ztrans();
tfddata();

Tabla 11: Lista de comandos 2.

DESARROLLO:

a) ver ec. 23; gráfica a continuación

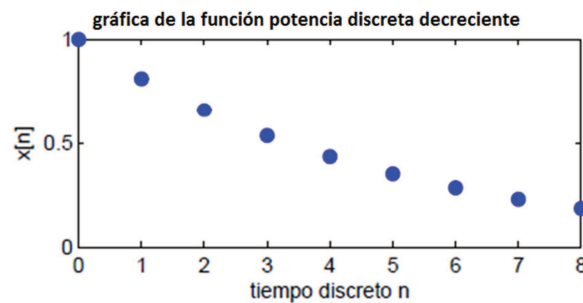


Figura 15: función discreta 'a'.

Calculando la transformada z analíticamente, se tiene lo siguiente:

$$Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{a}{z}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{z}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} ; \text{con } |z| > |a| \quad 28)$$



$$X(Z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2Z}{2Z - 1} ; |z| > \left| \frac{1}{2} \right| \quad 29)$$

El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 16.

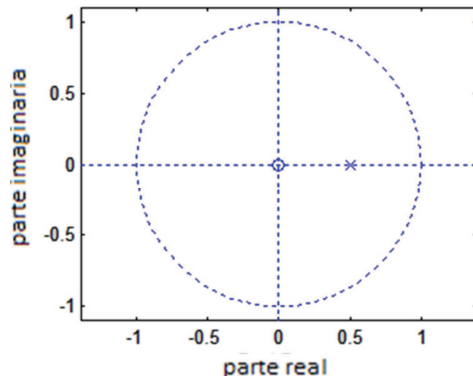


Figura 16: diagrama de polos y ceros para la función 'a'.

Mediante el uso del comando ztrans, Matlab obtiene:

$\frac{z}{0.5 - z}$

Figura 17: transformada z, función 'a'.

Como se puede observar el resultado que arroja Matlab, debe ser procesado e interpretado para evidenciar la equivalente con el resultado obtenido analíticamente, es decir:

$$-\frac{z}{0.5 - z} = \frac{z}{-(0.5 - z)} = \frac{z}{z - 0.5} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \quad 30)$$



b) Ver ec. 24

Nota: $1 = 1^n$

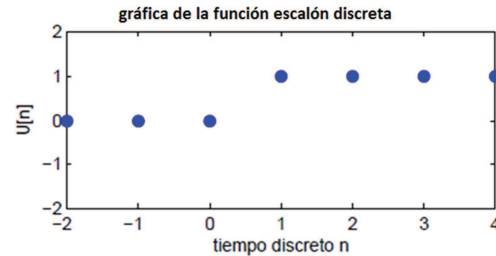


Figura 18: función discreta 'b'.

Calculando analíticamente la transformada z:

$$Z\{u[n]\} = Z\{1^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad (31)$$

Aplicando el criterio d'alembert a la serie geométrica anterior se tiene que la ROC es: $|z| > 1$

Desarrollando la suma de la serie geométrica para encontrar la transformada z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1} \quad (32)$$

Finalmente:

$$X(Z) = \frac{z}{z - 1} ; \forall |z| > 1 \quad (33)$$

El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 19.

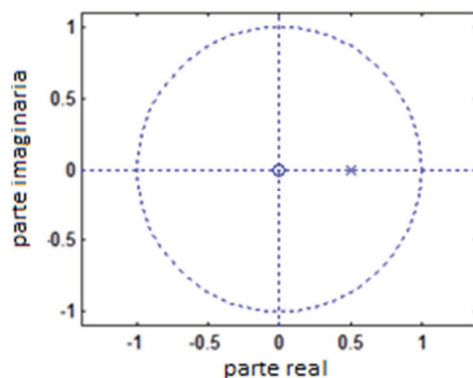


Figura 19: diagrama de polos y ceros para la función discreta 'b'.



Mediante el uso del comando ztrans de Matlab se obtiene:

$$\begin{array}{l} z \\ \hline z - 1 \end{array}$$

Figura 20: transformada z, función b

En éste caso el resultado es equivalente a la señal original (ec 24).

c) Ver ec. 25.

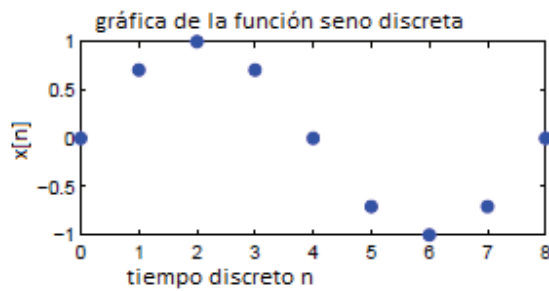


Figura 21: función discreta 'c'.

Aplicando analíticamente la transformada z, y tomando en cuenta el resultado del inciso 'a' se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Z \left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right\} &= Z \left\{ \frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2i} \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{z}{z - e^{i\omega n}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega n}} \right\} & 34) \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{z(z - e^{-i\omega n}) - z(z - e^{i\omega n})}{(z - e^{i\omega n})(z - e^{-i\omega n})} \right\} = \frac{1}{2i} \frac{z^2 - ze^{-i\omega n} - z^2 + ze^{i\omega n}}{z^2 - ze^{i\omega n} - ze^{-i\omega n} + 1} \\ &= \frac{z \left(\frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2i} \right)}{z^2 - 2z \left(\frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2i} \right) + 1} = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} \end{aligned}$$



En tanto que el radio de convergencia es el resultado de la intersección de ambas exponenciales cuyo ROC puede ser obtenido por separado eliminando el factor complejo de la identidad de Euler:

$$ROC_1: |z| \geq |e^{i\omega n}| \cap ROC_2: |z| \geq |e^{-i\omega n}| \rightarrow |z| \geq |e^{i\omega n}| \therefore |z| \geq 1 \quad 35)$$

$$|e^{i\omega n}| = 1$$

Finalmente:

$$X(Z) = \frac{z \operatorname{sen}(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} ; |z| \geq 1 \quad 36)$$

El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 22.

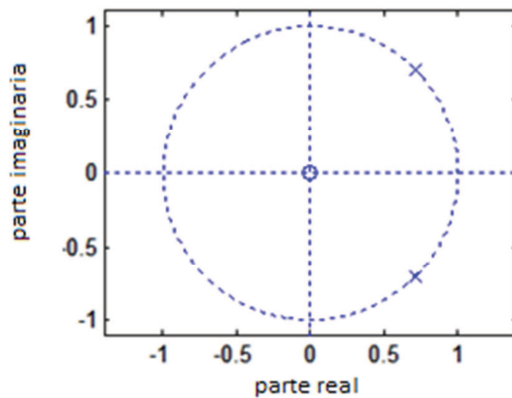


Figura 22: diagrama de polos y ceros para la función discreta 'c'.

Computacionalmente, usando el comando "ztrans" de Matlab, con $\omega = \frac{\pi}{4}$, se obtiene el resultado mostrado en la figura 23.

$$\frac{\frac{1}{2}}{2z} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2(z - \frac{1}{2}z + 1)}$$

Figura 23: transformada z, función c

En éste ejemplo, se debe interpretar nuevamente el resultado obtenido en Matlab para comprobar que el resultado es correcto. Y como puede verse Matlab calcula el resultado evaluando la función trigonométrica con el argumento propuesto, como se observa en la ecuación 37.



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{z \operatorname{sen}(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} = \frac{z \frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - 2z \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{z \sqrt{2}}{2z^2 - 2z\sqrt{2} + 2} = \frac{z \sqrt{2}}{2(z^2 - z\sqrt{2} + 1)} \quad 37)$$

Este hecho demuestra que muestra el resultado Matlab es equivalente al obtenido analíticamente para el cálculo de la transformada de la ec 37 y figura 23.

d) Ver ec. 26.

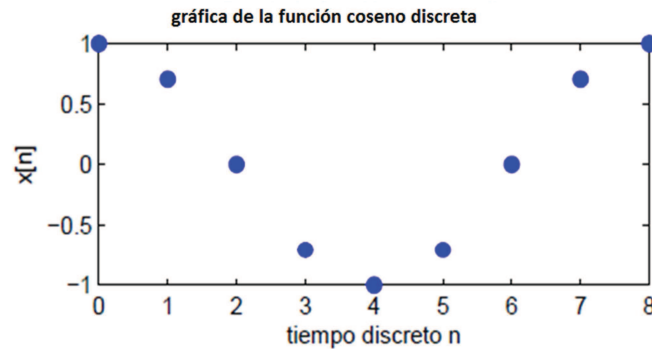


Figura 24: función discreta 'd'

Aplicando analíticamente la transformada z , y tomando en cuenta el resultado del inciso 'a' se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} X(z) &= Z\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = Z\left\{\frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2i}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{z}{z - e^{i\omega n}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega n}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{z(z - e^{-i\omega n}) + z(z - e^{i\omega n})}{(z - e^{i\omega n})(z - e^{-i\omega n})}\right\} = \frac{1}{2}\frac{z^2 - ze^{-i\omega n} + z^2 - ze^{i\omega n}}{z^2 - ze^{i\omega n} - ze^{-i\omega n} + 1} \\ &= \frac{z^2 - z\left(\frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2i}\right)}{z^2 - 2z\left(\frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2}\right) + 1} = \frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1} \quad 38) \end{aligned}$$

En tanto que el radio de convergencia es el resultado de la intersección de ambas exponenciales cuyo ROC puede ser obtenido por separado eliminando el factor complejo de la identidad de Euler; ver ec. 39.



$$ROC_1: |z| \geq |e^{i\omega n}| \cap ROC_2: |z| \geq |e^{-i\omega n}| \rightarrow |z| \geq 1 |e^{i\omega n}| = 1 \quad 39)$$

Similarmente, al caso de la función seno, el radio de convergencia resulta ser $|z| \geq 1$

Finalmente:

$$X(Z) = \frac{z(z - \cos(\omega))}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1} ; \forall |z| \geq 1 \quad 40)$$

El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 25.

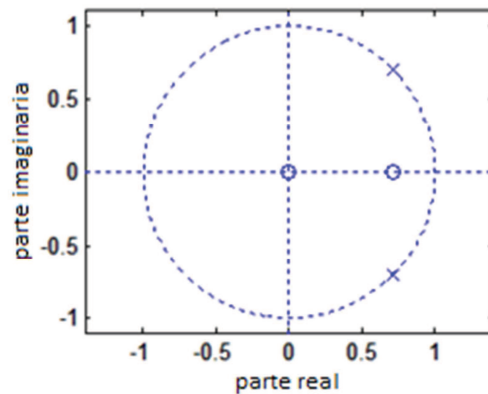


Figura 25: diagrama de polos y ceros para la función discreta 'd'

Mediante el uso del comando ztrans de Matlab se obtiene el resultado mostrado en la figura 26.

$$\frac{z^{1/2}}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$$

Figura 26: transformada z, función 'd'



En éste ejemplo, se debe interpretar nuevamente el resultado obtenido en Matlab para comprobar que éste resultado y el obtenido matemáticamente son iguales.

Partiendo nuevamente del hecho que:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \rightarrow \frac{z(z - \cos(\omega))}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1} &= \frac{z\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z^2 - 2z\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{z\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} \end{aligned} \quad 41)$$

e) Ver ec. 27.

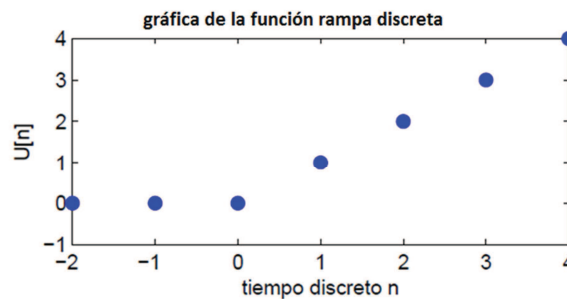


Figura 27: función discreta 'e'

Utilizando el operador lineal de la derivada es posible obtener la transformada z de 'n' para el caso especial de a^n dónde el coeficiente a es igual a 1.

Si

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} Z\{a^n\} &= \frac{d}{da} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\}; \\ \rightarrow Z\{na^{n-1}\} &= \frac{z}{(z-a)^2}; \\ \therefore Z\{na^n\} &= \frac{a z}{(z-a)^2} \end{aligned} \quad 42)$$

Para el caso especial cuando $a = 1$, se tiene:

$$Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad 43)$$

La región de convergencia es la misma que para la función a^n donde $a = 1$, ver ec. 29



El diagrama de polos y ceros correspondiente se muestra en la figura 28.

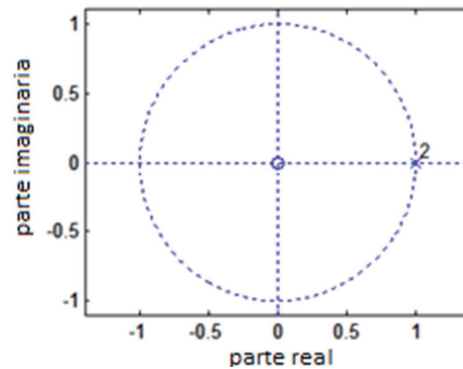


Figura 28: diagrama de polos y ceros para la función discreta 'e'

Mediante el uso del comando ztrans de Matlab se obtiene el resultado mostrado en la figura 29.

$$\frac{z}{(z-1)^2}$$

Figura 29: transformada z, función 'e'

En este ejemplo, ambos resultados (analítica y computacionalmente) son visiblemente iguales (figura 29, ec. 43).



REQUISITOS DE ENTREGA

- Al final de la práctica, elabore un reporte con todos los diagramas de polos y ceros obtenidos en MATLAB y anexa la programación empleada en cada caso.
- Verifique la equivalencia de los resultados obtenidos matemáticamente y computacionalmente, si es el caso indica a que se deben las diferencias al presentar ambos resultados.
- Investigar el funcionamiento de los CAS.

Debido al gran desarrollo de la informática y la computación, hoy en día se cuenta con los sistemas algebraicos computarizados (CAS por sus siglas en inglés), los cuales permiten manipular expresiones algebraicas por medio de la computadora. Estos sistemas pueden estar especializados en teoría de grupos, teoría de números, etc. Los sistemas algebraicos computarizados pueden ser especializados, como los ya mencionados, o bien de propósito general; MATLAB posee esta herramienta y permite calcular por ejemplo la transformada z de una expresión.

CUESTIONARIO

1. ¿Cuál es la utilidad de la transformada z en el tratamiento digital de señales?
2. ¿Investiga y explica cada una de las formas de graficar la transformada z ?
3. ¿Por qué algunas veces los resultados obtenidos analíticamente son visiblemente diferentes a los obtenidos computacionalmente?
4. En base a otros CAS que usted conozca, menciona las desventajas y ventajas de MATLAB.
5. Elabore un diagrama del proceso en la transformación de la sucesión a la expresión algebraica obtenida en la transformada z .
6. ¿Qué es la región de convergencia?
7. Explique que es un polo para una transformada z .
8. Explique que es cero para una transformada z .
9. Mencione otros programas que utilicen un CAS
10. ¿Cuál es la utilidad del criterio d'Allembert?



PRÁCTICA #3

“PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z”

OBJETIVO GENERAL:

El alumno conocerá y aplicará algunas de las propiedades más importantes de la transformada z a las señales digitales.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) Partiendo de una señal básica, se modificará para obtener distintas variantes de la misma y se calculará en cada caso su correspondiente transformada cuando se pueda.
- ii) Calcular la transformada z mediante programación empleando el comando “ztrans” o aplicando la propiedad a la transformada original empleando la propiedad por programación.

INTRODUCCIÓN

La transformada z , al igual que las transformadas de Fourier y de Laplace, posee distintas propiedades y tiene la particularidad de trabajar conjuntamente una región de convergencia, esto implica un especial cuidado al operar con las propiedades, ya que se debe expresar la transformada con su correspondiente región de convergencia.

Frecuentemente se han empleado métodos de transformación para simplificar el análisis y síntesis de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales o en diferencias. La transformada Z es una regla por la cual una secuencia de números son convertidos a una función de la variable compleja z . Debido a su estructura básica, la transformada z posee propiedades que facilitan la solución de ecuaciones en diferencias lineales usando simplemente manipulaciones algebraicas.

Frecuentemente en la ingeniería, la manera más común de resolver una transformada z es mediante el uso de las tablas de propiedades en lugar de calcularla analíticamente. Este hecho implica que para obtener la transformada vía la aplicación de fórmula, se deben interpretar y manejar perfectamente dichas propiedades de la transformada z .

Muchas propiedades de un sistema pueden estar relacionadas directamente con las características de los polos, de los ceros y de la región de convergencia de la función del sistema. A continuación se ilustran algunas de estas relaciones en la tabla número siete.



Tabla 9: propiedades de la transformada z

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z		
PROPIEDAD	SEÑAL	TRANSFORMADA Z
Linealidad: $ROC = (R_x \cap R_y)$	$\alpha x[n] \pm \beta y[n]$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$
Desplazamiento positivo en el tiempo:	$x[n - n_0] \quad n_0 \geq 0$	$z^{n_0} X(z)$
Desplazamiento negativo en el tiempo:	$\sum_{m=0}^{n_0-1} x[n + n_0 - m]$ $n_0 > 0$	$z^{n_0} \left(X(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m] z^{-m} \right)$
Cambio de escala: $ROC = a R_x$	$\alpha^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$
Teorema del valor inicial:	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
Diferenciación en el dominio z:	$nx[n]$	$-\frac{d}{dz} X(z)$
Convolución en tiempo discreto: $ROC = (R_x \cap R_y)$	$x[n] * y[n]$	$Y(z)X(z)$
Diferencia:	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$
Acumulación: $ROC = [R_x \cap (z > 1)]$	$\sum_{m=0}^n x[m]$	$\left(\frac{z}{z-1}\right) X(z)$
Teorema de valor final	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$
Multiplicación por coseno	$x[n] \cos(\omega n)$	$\frac{1}{2} [X(ze^{i\omega}) + X(ze^{-i\omega})]$
Multiplicación por seno	$x[n] \sin(\omega n)$	$\frac{1}{2j} [X(ze^{i\omega}) - X(ze^{-i\omega})]$



Expansión en el tiempo $ROC = R^{1/k}_x$	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right]; & \forall n \text{ múltiplo de } k \\ 0; & \forall n \text{ no múltiplo de } k \end{cases}$	$X(z) _{z \rightarrow z^k} = X(z^k)$
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z) _{z \rightarrow \frac{1}{z}} = X\left(\frac{1}{z}\right)$

Tabla 9: propiedades de la transformada z

INFORMACIÓN ADICIONAL

MATLAB fue programado con muchas utilidades que se aplican a diversos campos de la ciencia y la ingeniería, cuando no es claro la forma en que una utilidad funciona, una forma de entender lo que sucede es leyendo la documentación que ofrece el paquete de MATLAB, en ella se encuentra almacenada información que sirve de guía y se accede a ella mediante el comando “doc”, seguido del elemento a investigar, es decir que se debe especificar el nombre de la función. [8]

INSTRUCCIONES:

Sean las siguientes señales causales:

- a) $x[n] = a^n$; con $a = 2$; 44)
- b) $x[n] = a^{2n}$; con $a = \frac{1}{2}$; 45)
- c) $x[n] = e^{in\omega_0}$; 46)
- d) $x[n] = e^{\frac{n}{2}}$; 47)
- e) $x[n] = u[n]$; 48)
- f) $x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$; 49)
- g) $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$; 50)
- h) $x[n] = n$; 51)
- i) $x[n] = \frac{1}{n}$; 52)
- j) $x[n] = n^2$; 53)

Dependiendo de la señal asignada, aplicar las siguientes propiedades:

- i. Desplazamiento positivo en el tiempo; con $n_0 = 2$.
- ii. Cambio de escala; con $\alpha=3$ y $\alpha=\frac{1}{3}$.
- iii. Diferenciación en el dominio z.



- iv. Multiplicación por seno; con $\omega = \frac{\pi}{4}$
- v. Multiplicación por coseno; con $\omega = \frac{\pi}{4}$
- vi. Expansión en el tiempo; con $k=2$.

Calcular matemáticamente la transformada z y verificar la igualdad entre el resultado que ofrece MATLAB contra el obtenido analíticamente.

OBSERVACIONES:

- i) Apoyarse en el cuadro 4 que más adelante se muestra para realizar el trabajo.
- ii) Utilizar el cálculo simbólico y especificar las variables como tipo simbólico, por ejemplo: a, e, etc. Y al final del proceso asignar el valor propuesto a dicha variable.
- iii) Tener presente el resultado ya conocido para la transformada de la señal en cuestión.
- iv) En caso de ser necesario, aplicar la propiedad directamente a la variable que posee el cálculo simbólico de la transformada original.

LISTA DE COMANDOS	
heaviside();	
ztrans();	
Pretty();	
syms	
subs () ;	
hold on	

Tabla 13: lista de comandos 3

Nota adicional:

La expresión de Heaviside, vale 1 para la parte positiva, cero para la $n < 0$ y 0.5 para $n = 0$, existe una parte adicional reflejada en el resultado de las transformadas z, esto no es parte del resultado real pero se explica con la programación utilizado en MATLAB, presente en la documentación.

**DESARROLLO**

Solución de la señal del inciso a) $x[n] = a^n$; con $a = 2$

i. Desplazamiento positivo en el tiempo.

$$Z\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0}X(z) \quad 54)$$

Si: $x[n] = a^n$, entonces: $x[n - n_0] = a^{n-n_0}$, como $n_0 = 2$, esto significa que la señal a transformar mediante el teorema de corrimiento será:

$$x[n - 2] = a^{n-2} \quad 55)$$

El cálculo analítico de la transformada z a dicha señal desplazada es:

$$Z\{a^{n-2}\} = z^{-2} \frac{z}{z-a}; |z| > |a| \quad 56)$$

Computacionalmente, el resultado en MATLAB se muestra en la figura 30.

```

a    1
-----
a - z  2
-----
      2
      z
  
```

Figura 30: desplazamiento en el tiempo, transformada z , resultado

Se omite la constante en el numerador, pero es fácil advertir que el resultado no es correcto, aunque se tiene un factor en el denominador igual a z^2 (ver figura 31) pero en el numerador el término $\frac{a}{a-z}$ no corresponde a la transformada original, es por ello que para este ejemplo, con el fin de calcular la transformada z utilizando la propiedad en cuestión, se utilizarán el comando “subs” que permite realizar un cambio de variable y aplicar la propiedad directamente como muestra la ec. 57.

$$X = \frac{X}{z^{n_0}} \quad 57)$$



El comando anterior permite aplicar directamente la propiedad de desplazamiento en el tiempo, en la figura 31 se muestra el nuevo resultado obtenido computacionalmente.

$$\frac{1}{z(a-z)}$$

Figura 31: desplazamiento en el tiempo aplicado.

Verificando la equivalencia del resultado obtenido analítica y computacionalmente, se tiene:

$$-\frac{1}{z(a-z)} = -\frac{z}{z^2(a-z)} = \frac{z}{z^2(z-a)} \quad 58)$$

Por último, es claro ver que se ha llegado al mismo resultado (ecuaciones 56 y 58), sin embargo tuvo que ser aplicada la propiedad de manera directa.

ii. Cambio de escala:

$$Z\{\alpha^n x[n]\} = Z\{x[n]\}|_{z \rightarrow \frac{z}{\alpha}} = X(z)|_{z \rightarrow \frac{z}{\alpha}} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad 59)$$

Si: $x[n] = a^n$, entonces: $\alpha^n x[n] = \alpha^n a^n$, con $a = 2$ y $\alpha = 3$,

Calculando analíticamente la transformada z a ésta señal se tiene:

$$Z\{\alpha^n a^n\} = Z\left\{\frac{z}{z-a}\right\}|_{z \rightarrow \frac{z}{\alpha}} = \frac{z}{z-a\alpha} \quad 60)$$

Computacionalmente se obtiene el resultado mostrado en la figura 32.

$$\frac{z}{a\alpha - z}$$

Figura 32: cambio de escala, transformada z , resultado



Partiendo del resultado anterior hacia el original, se debe verificar que ambos resultados, el analítico y el obtenido computacionalmente son los mismos.

$$-\frac{z}{a\left(\alpha - \frac{z}{a}\right)} = \frac{z}{a\left(\frac{z}{a} - \alpha\right)} = \frac{z}{(z - a\alpha)} \quad 61)$$

Con el uso del álgebra se puede ver que se cuenta con el mismo resultado (Ecuación 61, Ecuación 62), la ROC se modifica y queda de la siguiente manera:

$$|z| > |a||\alpha| \quad 62)$$

En este caso, la región de convergencia se expande por un factor de α

iii. Diferenciación en el dominio z.

$$\mathfrak{z}\{nx[n]\} = -z \frac{d}{dz} X(z) \quad 63)$$

Si:

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n \\ \rightarrow nx[n] &= na^n, \text{ con } a = 2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow Z\{na^n\} = -z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = \frac{za}{(z-a)^2} \quad 64)$$

Computacionalmente se obtiene el resultado mostrado en la figura 33.

$$\frac{z}{a} \frac{z}{z-a} \frac{1}{z-a}$$

Figura 33: diferenciación, transformada z, resultado.

Verificando que ambos resultados sean equivalentes (ec. 64, ec. 65):



$$\frac{z}{a\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \frac{az}{a^2\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2} \quad 65)$$

La región de convergencia permanece igual que la señal original (ec. 44), es decir que es:
 $|z| > |a|$.

iv. Multiplicación por coseno

$$Z\{x[n]\cos(\omega n)\} = \frac{1}{2}[X(ze^{i\omega}) + X(ze^{-i\omega})] \quad 66)$$

Si:

$$x[n] = a^n \rightarrow \cos(\omega n)x[n] = a^n \cos(\omega n); \omega = \frac{\pi}{4} \quad 67)$$

Calculando la transformada z:

$$Z\{x[n]\cos(\omega n)\} = \frac{z^2 - az \cos(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2} = \frac{z^2 - az \frac{2}{\sqrt{2}}}{z^2 - 2az \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2} \quad 68)$$

Computacionalmente se obtiene el resultado mostrado en la figura 34.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} / \ 1/2 \ \backslash \\ | \ 2 \ \ z \ | \\ z \ | \text{---} \text{---} \ | \\ \backslash \ 2 \ \ a / \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} / \ 2 \ 1/2 \ \backslash \\ | \ z \ 2 \ z \ | \\ a \ | \text{---} \text{---} + 1 \ | \\ | \ 2 \ \ a \ \ | \\ \backslash \ a \ \ \ / \end{array} \end{array}$$

Figura 34: multiplicación por coseno,
transformada z, resultado.



Ahora, es necesario verificar analíticamente los resultados sean equivalentes como se muestra en la figura 69.

$$\begin{aligned}
 -\frac{z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{z}{a}\right)}{a\left(\frac{z^2}{a^2}-\frac{z\sqrt{2}}{a}+1\right)} &= \frac{\left(\frac{z^2}{a}-\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{z^2}{a}-\frac{z\sqrt{2}}{1}+a\right)} = \frac{\left(\frac{z^2}{a}-\frac{z\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{z^2}{a}-\frac{z\sqrt{2}}{1}+a\right)} = \frac{\frac{2z^2-za\sqrt{2}}{2a}}{\frac{z^2-za\sqrt{2}+a^2}{a}} \\
 &= \frac{2z^2-za\sqrt{2}}{2(z^2-za\sqrt{2}+a^2)} = \frac{z^2-za\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2-za\frac{2\sqrt{2}}{2}+a^2} = \frac{z^2-az\cos(\omega)}{z^2-2az\cos(\omega)+a^2} \\
 \omega &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

69)

La región de convergencia permanece igual que en señal original (ec. 44), es decir $|z| > |a|$, esto se explica tomando en cuenta que a pesar de que la señal se multiplica por el equivalente del seno en términos de exponenciales, aplicando cambio de escala considerando que el valor absoluto de una exponencial compleja es uno (es decir su módulo), el factor de expansión es uno y por lo tanto no se altera la región de convergencia.

v. Multiplicación por seno

$$\mathfrak{z}\{x[n]\text{sen}(\omega n)\} = \frac{1}{2}[X(ze^{i\omega}) - X(ze^{-i\omega})] \quad 70)$$

Si:

$$x[n] = a^n \rightarrow \text{sen}(\omega n)x[n] = a^n \cos(\omega n); \omega = \frac{\pi}{4} \quad 71)$$

Esto significa que la señal a transformar mediante el teorema de corrimiento será:

$$\mathfrak{z}\{x[n]\text{sen}(\omega n)\} = \frac{az \text{sen}(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2} = \frac{az \frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - 2az \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2} \quad 72)$$



Computacionalmente, se obtiene el resultado mostrado en la figura 35.

$$\frac{1/2}{2z} \cdot \frac{z^2 - \frac{1}{2} + 1}{z^2 - az + a^2} = \frac{z^2 - \frac{1}{2} + 1}{2z(z^2 - az + a^2)}$$

Figura 35: multiplicación por seno, transformada z, resultado.

Ahora se comprueba algebraicamente la equivalencia entre ambos resultados:

$$\begin{aligned} \frac{z\sqrt{2}}{2a\left(\frac{z^2}{a^2} - \frac{z\sqrt{2}}{a} + 1\right)} &= \frac{z\sqrt{2}}{\left(\frac{z^2}{a} - \frac{z\sqrt{2}}{1} + a\right)} = \frac{z\sqrt{2}}{\left(\frac{2z^2}{a} - \frac{2z\sqrt{2}}{1} + 2a\right)} = \frac{z\sqrt{2}}{\frac{2z^2 - 2za\sqrt{2} + 2a^2}{a}} \\ &= \frac{za\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(z^2 - za\frac{2\sqrt{2}}{2} + a^2\right)} = \frac{az \sin(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}; \omega = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad 73)$$

La ROC no se altera debido a las mismas razones que fueron explicadas en la señal del seno, por lo tanto:

$$|z| > |a| \quad 74)$$

vi. Expansión en el tiempo

Si:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right]; & n \text{ múltiplo de } k \\ 0; & n \text{ no múltiplo de } k \end{cases}$$

$$\rightarrow X(z^k) = Z\left\{x\left[\frac{n}{k}\right]\right\} = Z\{x[n]\}_{z \rightarrow z^k}; k \text{ múltiplo de } n \quad 75)$$



Si:

$$x[n] = a^n \rightarrow x_{(k)}[n] = x\left[\frac{n}{k}\right] = a^{\frac{n}{k}}; \text{ con } k = 2. \quad 76)$$

Por lo tanto la transformada z es:

$$X(z^2) = \left\{ a^{\frac{n}{2}} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a^{\frac{n}{2}}\} z^{-n} = \frac{z^2}{z^2 - a} \quad 77)$$

En este caso la región de convergencia se ve alterada dada la regla de correspondencia: $ROC = R_x^{1/k}$, por lo tanto la nueva región de convergencia viene dada por $|z| > |a|^{\frac{1}{2}}$, en este caso la ROC se comprime, es decir que se reduce su área en el plano complejo z.

Computacionalmente, se obtiene lo mostrado en la figura 38.



Figura 36: expansión en el tiempo, transformada z, resultado.

Ahora se comprueba algebraicamente la equivalencia entre ambos resultados:

$$-\frac{z^2}{a - z^2} = \frac{z^2}{-(a - z^2)} = \frac{z^2}{z^2 - a} \quad 78)$$

Con lo anterior queda demostrado que ambos resultados son equivalentes (fig. 38 y ec. 77)



REQUISITOS DE ENTREGA

- Al final de la práctica, elabore un reporte que contenga las gráficas obtenidas en MATLAB de cada uno de los teoremas aplicados a la señal digital asignada por su profesor.
- Especificar en qué casos fue necesario aplicar la propiedad mediante programación en MATLAB, y a qué, probablemente se deba esto (revisar la documentación del comando).
- Especificar la escala a utilizar

CUESTIONARIO

1. ¿Qué dificultades surgieron al calcular la transformada z de cada una de las propiedades?
2. ¿Cuál es la forma de efectuar la sustitución de una variable al programarla en MATLAB?
3. ¿Qué diferencias observa entre los diagramas de polos y ceros de la señal digital original y la modificada vía aplicación de propiedades?
4. ¿Cuál es el comando que te permite modificar el diámetro de la región de convergencia en MATLAB.
5. ¿A qué se debe que el CAS de MATLAB presente el resultado de la transformada z distinto al obtenido matemáticamente?
6. ¿Qué diferencias encuentra entre la función escalón unitario y la expresión de Heaviside?
7. Es posible considerar a la expresión de Heaviside como una función? explica tu respuesta.
8. En qué casos y porque la expresión de Heaviside nos permite realizar el cálculo de la transformada z en MATLAB?
9. En el caso de la señal que se pide en el penúltimo punto de los requisitos de entrega, cuando se realizan los cambios de variables para obtener la transformada z de manera computacional, ¿qué pasa si se cambia el orden de los cambios de variable?
10. Como justificaría usted una respuesta correcta con respecto al punto nueve de este cuestionario.



3.5 Práctica 4: Transformada z inversa

OBJETIVO GENERAL:

El alumno conocerá y aplicará los diferentes métodos para calcular la transformada z inversa.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) Partiendo de una señal transformada, se aplicarán los métodos de fracciones parciales, integral de inversión, división directa y el método computacional.
- ii) Una vez que se cuente con el resultado analítico de la transformada z inversa, se comparará con lo obtenido por el método computacional.
- iii) Aplicar la transformada z inversa en la resolución de ecuaciones en diferencia.

INTRODUCCIÓN:

La transformada z inversa de una función dentro de la variable compleja se define de la siguiente manera:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(Z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(Z) z^{n-1} dz \quad 79)$$

Donde c es el círculo cerrado que envuelve al origen y la región de convergencia. A partir de la transformada z inversa solo se obtiene la secuencia de tiempo en los instantes de muestreo (señal digital). Existen varios métodos para obtener la transformada z inversa:

1. Método de la división directa.
2. Método de la expansión en fracciones parciales.
3. Método de la integral de inversión.
4. Método computacional.

1.- Método de la división directa:

Si $X(z)$ está dada en la forma de una función racional, la expresión en una serie de potencias infinitas en potencias crecientes de z^{-1} , se puede lograr al dividir el numerador entre el denominador, donde el numerador y denominador de $X(Z)$ se escriben en potencias crecientes de z. Si la serie resultante es convergente, los coeficientes de los términos z^{-n} son los valores $x[n]$ de la secuencia del tiempo.

$$Z^{-1}\{X(Z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0} \right\} = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \dots \quad 80)$$



Se tendrá entonces una serie de términos infinita que corresponde a la secuencia de la expresión original.

Esta técnica produce los valores de la función en tiempo discreto directamente como una secuencia, tiene la ventaja de que es directa y siempre produce la transformada z inversa de un cociente de polinomios en z . la desventaja es que la transformada z inversa no está en forma cerrada.

2.- Expansión en fracciones parciales:

Factorizando o dividiendo sobre z a ambos lados de la expresión, es decir factorizando z del numerador de la función racional y pasándolo al otro extremo es posible obtener una expresión útil para aplicar fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - \alpha_1} + \frac{a_2}{z - \alpha_2} + \frac{a_3}{z - \alpha_3} + \dots + \frac{a_n}{z - \alpha_n} \quad 81)$$

De esta forma es posible obtener los coeficientes a_n , y resolver las fracciones parciales por los métodos ya conocidos vistos por el estudiantado en la materia cálculo diferencial e integral. En ciertos casos, los problemas desarrollados con expansión en fracciones parciales pueden ser muy laboriosos, en esos casos es más conveniente usar el método de integral de inversión.

3.- Integral de inversión (evaluación de residuos)

Partiendo de la definición de transformada z inversa:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(Z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c X(Z) z^{n-1} dz \quad 82)$$

Donde $x[n] = n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ denotan los residuos de $X(z)z^{n-1}$, continuamos en los polos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ respectivamente. Al evaluar los residuos, si el denominador de $X(Z)z^{n-1}$ se debe verificar si los polos presentes son simples o bien múltiples, en cuyos casos se ha de evaluar el límite correspondiente a cada polo como se muestra a continuación:

1. Polos simples:

$$n = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) X(Z) z^{n-1} \quad 83)$$



2. Polos múltiples de orden q :

$$n = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[(z - z_j)^q X(Z) z^{n-1} \right] \quad 84)$$

Nota: los valores de n son enteros positivos. Este método es sencillo de aplicar cuando $X(Z)z^{n-1}$ no tenga polos en el origen $z = 0$, de lo contrario el cálculo de la transformada z inversa puede tornarse laborioso.

4.- Método computacional:

El paquete MATLAB da la posibilidad de, mediante su CAS, realizar el cálculo simbólico de la transformada z inversa, este y otros paquetes (Maple, Mathematica, etc.) hacen posible el realizar la transformada z computacionalmente, esta es una opción que ha sido posible gracias al desarrollo de los sistemas de informática.

INFORMACIÓN ADICIONAL:

Cabe destacar que es importante transitar entre el plano complejo z de la transformación y el tiempo discreto ' n ' de la señal digital, ya que esto permite resolver ecuaciones en diferencia que son muy utilizadas en la resolución de diagramas a bloques en cuyo caso se analiza la función de transferencia así como la causalidad, estabilidad y respuesta en frecuencia.

INSTRUCCIONES:

a) Sea la siguiente transformada z :

$$X(z) = \frac{z^2 \left(z - \frac{1}{2} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} \right)} \quad 85)$$

Calcular la transformada z inversa para obtener la señal digital $x[n]$ mediante los siguientes métodos:

- i. División directa
- ii. Expansión en fracciones parciales
- iii. Integral de inversión (evaluación por residuo)
- iv. Método computacional

En el caso del método computacional, verificar la igualdad del resultado calculado analíticamente con el obtenido computacionalmente, de ser necesario.



- b) Usando los bloques básicos, dibuje el diagrama de bloques del sistema discreto en el tiempo expresado por la relación de entrada-salida:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + 2x[n] \quad 86)$$

Determine la función de transferencia y la respuesta al impulso unitario de dicho sistema.

OBSERVACIONES:

- i. Apoyarse en la lista de comandos del cuadro 5.

LISTA DE COMANDOS	
iztrans();	
pretty();	
syms;	

Tabla 14: lista de comandos 4

DESARROLLO

a) TRANSFORMADA Z INVERSA:

i. División Directa:

$$Z^{-1}\{X(Z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0} \right\} = c_0 z^0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \dots \quad 87)$$

En el caso particular, para la transformada en cuestión se tiene que:

$$Z^{-1}\{X(Z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 \left(z - \frac{1}{2} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} \right)} \right\} \quad 88)$$



Desarrollando los términos en el numerador y en el denominador, se tiene la expresión reescrita de la siguiente manera en la ec. 89:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z^3 - \frac{z^2}{2}}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{17}{36}z - \frac{1}{18}} \right\} \rightarrow \frac{z^3 - \frac{z^2}{2}}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{17}{36}z - \frac{1}{18}} = 1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{67}{144}z^{-2} + \dots \quad 89)$$

ii. Expansión en fracciones parciales:

Se factoriza una z del numerador de la función racional y esta pasa al extremo contrario, se busca obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - \alpha_1} + \frac{a_2}{z - \alpha_2} + \frac{a_3}{z - \alpha_3} + \dots + \frac{a_n}{z - \alpha_n} \quad 90)$$

En el caso particular, para la expresión de interés:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z \left(z - \frac{1}{2} \right)}{\left(z - \frac{2}{3} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right) \left(z - \frac{1}{4} \right)} = \frac{A}{z - \frac{2}{3}} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C}{z - \frac{1}{4}} \quad 91)$$

Obteniendo los coeficientes A, B y C ($A = \frac{4}{5}$, $B = 2$, $C = -\frac{9}{5}$) se tiene que:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{4}{5} \frac{1}{z - \frac{2}{3}} + 2 \frac{1}{z - \frac{1}{3}} - \frac{9}{5} \frac{1}{z - \frac{1}{4}} \quad 92)$$

Por último se reescribe la ecuación 92 agregando el término z a la función racional para efectuar la correspondiente transformación:

$$X(z) = \frac{4}{5} \frac{z}{z - \frac{2}{3}} + 2 \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{9}{5} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \quad 93)$$

$$Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{4}{5} \mathfrak{z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - \frac{2}{3}} \right\} + 2 Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right\} - \frac{9}{5} Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right\} \quad 94)$$



Al final se obtiene la señal $x[n]$ original:

$$x[n] = \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad 95)$$

iii. Integral de inversión (evaluación por residuo):

Analizando la expresión original, se observa que se tienen tres polos simples en los valores $z = \frac{2}{3}$; $z = \frac{1}{3}$ y $z = \frac{1}{4}$; de manera que se evalúan los límites correspondientes para obtener los residuos que formarán parte de la solución:

$$n_1 = \lim_{z \rightarrow \frac{2}{3}} \left(z - \frac{2}{3}\right) z^{n-1} \frac{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{2}{3}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{z^{n+1} \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$n_1 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad 96)$$

$$n_2 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \left(z - \frac{1}{3}\right) z^{n-1} \frac{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{2}{3}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{z^{n+1} \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{2}{3}\right) \left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$n_2 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad 97)$$

$$n_3 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \left(z - \frac{1}{4}\right) z^{n-1} \frac{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{2}{3}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{z^{n+1} \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{2}{3}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

$$n_3 = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)} = -\frac{9}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad 98)$$



$$x[n] = \left[\frac{4}{5} \left(\frac{2}{3} \right)^n + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{9}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u[n] \quad 99)$$

iv. Método computacional:

Mediante el comando “iztrans” de Matlab se obtiene el cálculo simbólico de la expresión original, se muestra el resultado obtenido en la figura 37.

$$\frac{1}{9} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{4}{5} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

Figura 37: aplicación del método computacional a la transformada z inversa, resultado

Es claro ver que salvo el orden de los términos, se tiene la misma expresión que se obtuvo en los métodos de fracciones parciales e integral de inversión (Figura 37, ec. 95).

b) DIAGRAMA A BLOQUES, FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y RESPUESTA AL IMPULSO

Partiendo de la ecuación en diferencias:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + 2 x[n] \quad 100)$$

Se llega al correspondiente (figura 38) diagrama a bloques, dónde están presentes todos los elementos de la ecuación 100.

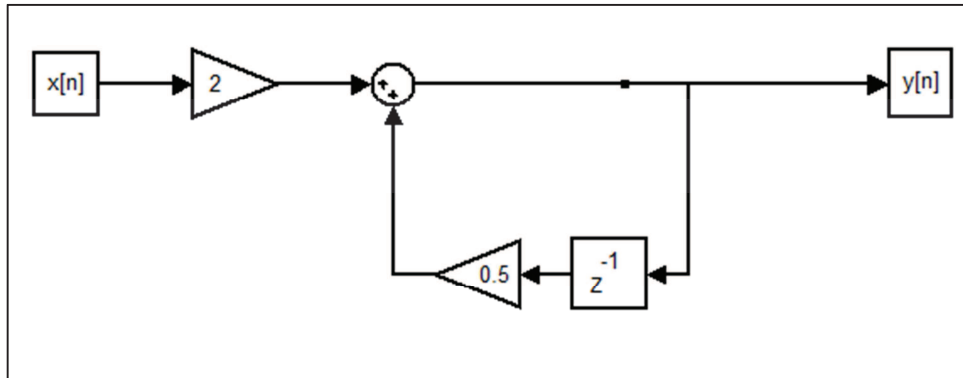


Figura 38: diagrama a bloques del sistema

$$Z\{y[n]\} = \frac{1}{2} Z\{y[n-1]\} + 2 Z\{x[n]\} \quad 101)$$

$$Y(Z) = \frac{1}{2} Z^{-1} Y(Z) + 2 X(Z) \quad 102)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{2}{\left(1 - \frac{Z^{-1}}{2}\right)} = \frac{2z}{z - \frac{1}{2}} \quad 103)$$

$$Z^{-1}\{H(Z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{z - \frac{1}{2}}\right\} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad 104)$$

Se ha obtenido la función de transferencia y la respuesta al impulso dada por:

$$h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad 105)$$



Nota adicional:

La respuesta al impulso de la función de transferencia $H(z)$ se deduce de que si por un sistema $H(z)$ pasa una señal $X(z)$ entonces la salida será $Y(z) = H(z) X(z)$, en el caso anterior, $X(z)$, corresponde al impulso (ver figura 39).

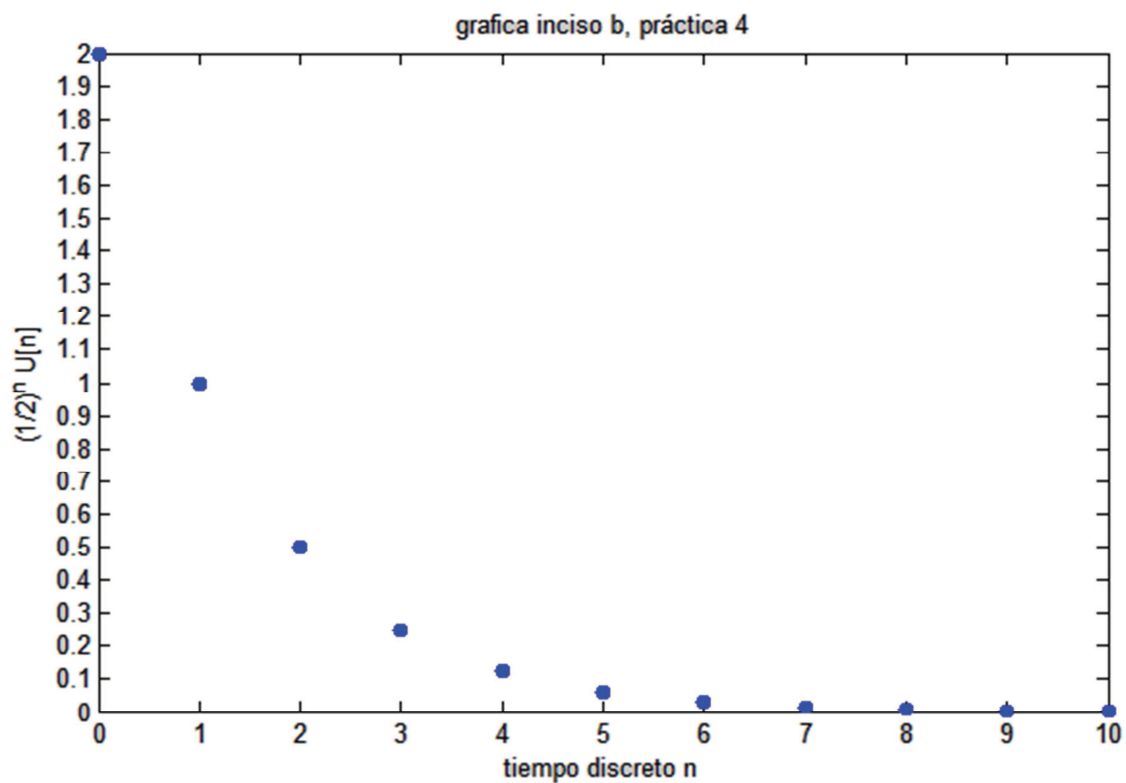


Figura 39: respuesta al impulso

REQUISITOS DE ENTREGA

- Al final de la práctica, elabore un reporte que contenga los cálculos analíticos y el código necesario para realizar el método computacional para obtener la transformada z .
- En cada método, especificar cada uno de los pasos.
- De ser necesario, especificar la equivalencia del resultado computacional con los métodos analíticos.
- Obtenga la respuesta al impulso unitario del sistema en cuestión.



CUESTIONARIO

1. ¿Qué entiende usted al analizar la expresión que define a la transformada z inversa?
2. ¿El método de división directa es tan útil como los demás?
3. ¿Qué comparación puede hacer usted respecto a los métodos de expansión en fracciones parciales e integral de inversión, que ventajas y desventajas encuentra?
4. ¿Qué se puede decir sobre la señal potencia, es decir a^n ?
5. En el caso del método computacional, ¿Existe alguna dificultad para calcular la transformada z inversa?
6. ¿De qué depende tener una respuesta al impulso o al escalón en un sistema discreto en el tiempo?
7. Describa el método de expansión en fracciones parciales para obtener la transformada z inversa.
8. Describa el método de la división directa:
9. Describa el método de integral de inversión.
10. Mencione qué papel juega el CAS en el método computacional.



IPN





CAPÍTULO IV

CONTENIDO TEMÁTICO: ANÁLISIS EN FRECUENCIA



En este capítulo se da a conocer las prácticas y el temario que corresponden a la segunda parte de la revisión de la herramienta matemática necesaria para el diseño de filtros, en la unidad dos se revisa la serie de Fourier en tiempo discreto y la transformada discreta de Fourier.

UNIDAD II. Análisis en Frecuencia de las Funciones Discretas en Tiempo.

Esta unidad continúa con el aprendizaje de la herramienta matemática necesaria para implementar los filtros digitales. Los temas centrales de esta unidad son la serie y la transformada de Fourier en tiempo discreto. El programa marca lo siguiente:

- 2.1 *Relación de comportamientos en tiempo y frecuencia.*
- 2.2 *Representación de funciones periódicas y discretas.*
- 2.3 *Serie discreta de Fourier y sus propiedades: linealidad, escalamiento y desplazamiento en tiempo y frecuencia, convolución en tiempo y frecuencia*
- 2.4 *Relación entre funciones discretas en tiempo periódicas y no periódicas*
- 2.5 *Transformada discreta de Fourier y sus propiedades: linealidad, escalamiento y desplazamiento en tiempo y frecuencia, convolución en tiempo y frecuencia*
- 2.6 *Relación entre convolución lineal y circular.*
- 2.7 *Algoritmo de la T. rápida de Fourier*
- 2.8 *Aplicaciones de la T discreta de Fourier*
- 2.8.1 *Convolución lineal con la T. rápida de Fourier.*
- 2.8.2 *Correlación lineal con la T. rápida de Fourier.*
- 2.8.3 *Estimación espectral de señales de larga duración.*

Al término de esta unidad es posible ver que la serie y la transformada de Fourier en tiempo discreto junto con la transformada z , son las dos herramientas matemáticas utilizadas en este curso para diseñar los filtros digitales que posteriormente se analizarán en la tercera unidad. En el caso del análisis discreto de Fourier, se tienen distintas propiedades que permiten obtener la transformada de una función y de esta forma se tiene el espectro de frecuencias que caracteriza a la señal en cuestión, la propiedad de convolución es muy útil para el diseño de filtros digitales.

Las prácticas relacionadas a la unidad II son:

- I. Serie de Fourier en tiempo discreto.
- II. Transformada discreta de Fourier.
- III. Transformada rápida de Fourier.
- IV. Convolución lineal y circular.

La primera práctica de este bloque apoya el punto 2.3 del programa de estudios e introduce las propiedades de la serie de Fourier en tiempo discreto, en el caso de la práctica VI, apoya los puntos 2.2, 2.4 y 2.5; en ella se hace una distinción entre el concepto de la serie de Fourier en



tiempo discreto y la transformada discreta de Fourier, ambas prácticas (V y VI) contienen ejercicios base en los que únicamente se calcula la serie o la transformada de una señal, posteriormente se le pide al estudiante que calcule la serie y la transformada de Fourier mediante la aplicación de las propiedades, en cualquier caso se requiere el uso de MATLAB para que el estudiante corrobore los resultados obtenidos previamente.

Dada la importancia de la propiedad de convolución en el diseño de Filtros, se reservó una práctica solamente para esta propiedad, esto sirve como antesala para la unidad III y además apoya el punto 2.6; la penúltima práctica de este bloque corresponde a la transformada rápida de Fourier, en ella se emplea notablemente la mecánica utilizada en la unidad de aprendizaje de “análisis numérico”, pues en esta práctica y en la segunda de este bloque se le pide al estudiante no utilizar el comando de MATLAB que permite realizar los cálculos de la transformada discreta de Fourier (por sus siglas en inglés DFT –Discrete Fourier Transform-), sino que ellos realicen el código correspondiente (script) que permita realizar los cálculos, de esta manera es como se logra una mejor comprensión de los temas vistos en clase, además de generar la herramienta que permita el apoyo al estudiante.

Al término de esta unidad, el estudiante deberá haber adquirido los conocimientos necesarios para realizar el diseño de filtros digitales, sin embargo con el apoyo de las prácticas propuestas el alumno tiene una muy útil herramienta que le permite reforzar los temas vistos en clase y verificar ejercicios además de que el hecho de realizar cada práctica implica el revisar a profundidad los temas correspondientes a la unidad.

En cada una de las prácticas propuestas en este bloque se asignan ejercicios en los que el estudiante debe de realizar los diferentes algoritmos para así llevar a cabo las operaciones matemáticas necesarias, se prefiere que el estudiante desarrolle sus propios métodos en vez de que simplemente se utilicen comandos existentes en MATLAB, por citar un ejemplo, la práctica de transformada rápida de Fourier pide a los alumnos programar el método y no utilizar el comando FFT, de esta manera la comprensión de los métodos se asegura haciendo uso de las habilidades de los alumnos en cuanto a programación; probablemente este bloque sea el que exige más programación, pues en el primer bloque la transformada z se resuelve mediante las funcionalidades de MATLAB al igual que la transformada inversa pero en el caso del análisis de Fourier, se tienen que programar la mayoría de los métodos, lo cual implica un mayor esfuerzo de los estudiantes pero implica que de antemano estudien profundamente los temas correspondientes a la unidad. Otro punto importante a destacar dentro de este bloque, es que los alumnos se acercan al concepto de optimización de código y optimización de tiempo de ejecución, esto debido a que la transformada rápida de Fourier es un algoritmo que fue desarrollado con el objetivo de ahorrar tiempo de ejecución y evitar que el método ocupase demasiado tiempo, como en todas las prácticas, en la que corresponde a transformada rápida de Fourier se ofrece información acerca de tecnología en la actualidad relacionada con el bloque, en este caso se ofrece información de interés referente a la historia y aplicación de la FFT (Fast Fourier Transform, -transformada rápida de Fourier-). Este bloque de prácticas corresponde a la última parte que trata sobre la herramienta matemática necesaria para llevar a cabo el diseño de filtros, en este punto el estudiantado debe poseer ya un buen dominio del paquete MATLAB, cabe destacar que todo el trabajo realizado en cuanto a programación y MATLAB resulta muy útil para los alumnos que opten por tomar las especialidades de computación y control.



4.2 Práctica 5: Serie de Fourier en tiempo discreto

OBJETIVO GENERAL:

El alumno calculará los coeficientes de la serie de Fourier de señales periódicas discretas.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) El alumno identificará una señal periódica discreta, su periodo fundamental y calculará sus respectivos coeficientes de la serie de Fourier en tiempo discreto (SFTD).
- ii) Partiendo de una señal periódica discreta básica, el alumno aplicará las distintas propiedades y calculará sus respectivos coeficientes.

INTRODUCCIÓN

Sea $x[n]$ una secuencia periódica discreta de periodo fundamental N , es decir:

$$x[n] = x[n + N] \quad 106)$$

La representación en serie de Fourier de $x[n]$ consta de N funciones exponenciales armónicamente relacionadas, ver cuadro 6.:

Serie de Fourier en tiempo discreto	Coeficientes de la serie de Fourier
$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{j2n\pi k}{N}}$ Tiempo discreto, periódica en tiempo.	$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2n\pi k}{N}} \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1$ Frecuencia discreta, periódica en frecuencia.

Tabla 15: SFTD

Por lo general se utiliza la siguiente nomenclatura para indicar la relación entre la señal digital y los coeficientes de la serie:

$$x[n] \xleftrightarrow{SFTD} X_k \quad 107)$$

Existen varias maneras para calcular los coeficientes de la serie de Fourier en tiempo discreto, la primera es desarrollando la fórmula de los coeficientes X_k , el segundo método es desarrollando la serie geométrica finita:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} \frac{1-r^N}{1-r}; & r \neq 1 \\ N; & r = 1 \end{cases} \quad 108)$$



Y una tercera forma es, cuando $x[n]$ es una función trigonométrica. Empleando las identidades de Euler; se tiene:

$$\cos(\omega_k) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_k} + e^{-j\omega_k}); \sin(\omega_k) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_k} - e^{-j\omega_k}); \frac{2\pi k}{N} = \omega_k; \quad 109)$$

Dichos coeficientes de la serie de Fourier (X_k) son entidades complejas, por lo que al obtener dichos coeficientes se pueden graficar los correspondientes espectros de magnitud y fase.

En la tabla 16 se muestran las propiedades de la serie discreta de Fourier.

PROPIEDADES DE LAS SERIES DISCRETAS DE FOURIER		
Sean $x[n]$ & $y[n]$ señales periódicas discretas con periodo fundamental N y con coeficientes de la serie de Fourier X_k & Y_k respectivamente, entonces sean α y β constantes arbitrarias.		
Propiedad	Señal periódica	Coeficientes de la serie de Fourier
Linealidad	$\alpha x[n] + \beta y[n]$	$\alpha X_k + \beta Y_k$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_0]$	$X_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n]e^{jM(2\pi/N)n}$	X_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	X_{-k}^*
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	X_{-k}
Escalamiento en tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}]; & \text{si } n \text{ es múltiplo de } m \\ 0; & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } m \end{cases}$ <i>periódica con periodo mN</i>	$\frac{1}{m}X_k$ Vistas como periódicas con periodo mN
Convolución periódica	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	NX_kY_k
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} X_lY_{k-l}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	

Tabla 16: propiedades SFTD



		$X_k \left(1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \right)$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]; \text{ de valor finito y periodo } N$ $a_0 = 0$	$X_k \left(\frac{1}{1 - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}} \right)$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n] \text{ real}$ Tabla 10: propiedades SFTD	$\begin{cases} X_k^* = X_{-k} \\ \text{Re}\{X_k\} = \text{Re}\{X_{-k}\} \\ \text{Im}\{X_k\} = -\text{Im}\{X_{-k}\} \\ X_k = X_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	$x[n] \text{ real y par}$	$X_k \text{ real y par}$
Señales real e impar	$x[n] \text{ real e impar}$	$X_k \text{ solo imaginaria e impar}$
Descomposición par e impar de señales reales.	$\begin{cases} x_e[n] = \text{Er}\{x[n]\} [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\} [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Re}\{X_k\} \\ j\text{Im}\{X_k\} \end{cases}$
<i>Relación de Parseval (funciones periódicas):</i> $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] ^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k ^2$		

Tabla 16: propiedades SFTD

INFORMACIÓN ADICIONAL:

La simetría par e impar, así como la periodicidad de las señales continuas se cumplen también en el caso discreto:

$$x[-n] = x[n] ; \text{par}$$

$$x[-n] = -x[n] ; \text{impar}$$

110)

INSTRUCCIONES:

Sean las siguientes señales periódicas discretas:



$$1) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1} \ 1 \ 0 \ 0 \right\} \quad 111)$$

$$2) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{\frac{1}{4}} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{4} \right\} \quad 112)$$

$$3) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1} \ 0 \ 0 \ 1 \right\} \quad 113)$$

$$4) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{2} \ 0 \ -2 \ 0 \right\} \quad 114)$$

$$5) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{3} \ 2 \ 1 \ 0 \right\} \quad 115)$$

$$6) \ x[n] = \text{cosc}(n\pi); \text{ con } N=6 \quad 116)$$

$$7) \ x[n] = 1 + \text{sen}\left(\frac{2n\pi}{N}\right); \text{ con } N = 5 \quad 117)$$

$$8) \ x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right); \text{ con } N = 6 \quad 118)$$

$$9) \ x[n] = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n\pi}; \text{ con } N = 6 \quad 119)$$

$$10) \ x[n] = \text{senc}\left(\frac{n\pi}{3}\right); \text{ con } N = 5 \quad 120)$$

Calcule los coeficientes X_K de la SFTD de la función asignada:

- i. Empleando la fórmula general.
- ii. Desarrollando la serie geométrica finita
- iii. Empleando un script desarrollado por usted en MATLAB

Nota: Para las señales 6 a 10 en el inciso ii), se sugiere hacer uso de las identidades de Euler.

Posteriormente partiendo de la señal asignada, se aplicó las propiedades de:

- a) Desplazamiento en el tiempo con $n_0 = 2$.
- b) Desplazamiento en frecuencia con $k_0 = 2$
- c) Conjugación.
- d) Inversión en el tiempo.
- e) Escalamiento en el tiempo.
- f) Dualidad producto-convolución, para este caso proponga una señal $y[n]$ adecuada.
- g) Primera diferencia hacia atrás.

Calcule los coeficientes correspondientes en cada caso y verifíquelos empleando el programa de MATLAB ya desarrollado.

**OBSERVACIONES:**

- i. Apoyarse en la tabla .

LISTA DE COMANDOS	
angle();	
abs();	
round();	

Tabla 17: lista de comandos 5

- ii. Recordar los comandos utilizados para graficar señales discretas presentes en la práctica uno (Digitalización de una Señal Analógica).
- iii. Crear y anexar el código de una función que calcule los coeficientes de la SFTD; para ahorrar trabajo, usted puede, dentro de la misma función, procesar y almacenar los datos necesarios para graficar de manera automática los espectros de magnitud y fase, recuerde utilizar escalas adecuadas.

DESARROLLO:

Sea $x[n] = \{1, 1, 0, 0\}$ con periodo $N = 4$ 121)

Calcular los coeficientes X_K de la SFTD de la función asignada:

- i. Empleando la fórmula general.

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2jn\pi k}{N}} \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \quad 122)$$

De esta forma:

$$X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-\frac{2jn\pi k}{4}} = \frac{1}{4} \left(x[0] + x[1]e^{-\frac{j\pi k}{2}} + x[2]e^{-j\pi k} + x[3]e^{-\frac{j\pi 3k}{2}} \right) \quad \forall k$$

$$= 0, 1, 2, 3.$$

$$\rightarrow X_k = \frac{1}{4} \left(1 + e^{-\frac{j\pi k}{2}} \right) \quad \forall k = 0, 1, 2, 3.$$



De esta forma:

$$X_k = \begin{cases} X_0 = \frac{1}{2} \\ X_1 = \frac{1}{4}(1-j) \\ X_2 = 0 \\ X_3 = \frac{1}{4}(1+j) \end{cases} \quad 124)$$

ii. Desarrollando la serie geométrica finita:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} \frac{1-r^N}{1-r} \forall r \neq 1 \\ N \forall r = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow X_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-\frac{2jn\pi k}{4}} = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^1 1 e^{-\frac{2jn\pi k}{4}} + \sum_{n=2}^3 0 e^{-\frac{2jn\pi k}{4}} \right) \forall k = 0,1,2,3.$$

$$X_k = \sum_{n=0}^1 \left(e^{-\frac{2j\pi k}{4}} \right)^n ; r = e^{-\frac{2j\pi k}{4}} \& \begin{matrix} m-1=1 \\ \therefore m=2 \end{matrix}$$

$$r \neq 1 \rightarrow X_k = \left[\frac{1 - \left(e^{-\frac{2j\pi k}{4}} \right)^2}{1 - e^{-\frac{2j\pi k}{4}}} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-\frac{j\pi k}{2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\frac{1}{2j} \left(e^{-\frac{j\pi k}{2}} - e^{-\frac{j\pi k}{2}} \right) e^{-\frac{j\pi k}{2}}}{\frac{1}{2j} \left(e^{\frac{j\pi k}{4}} - e^{-\frac{j\pi k}{4}} \right) e^{-\frac{j\pi k}{4}}} \right] = \frac{1}{4} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi k}{2} \right) e^{-\frac{j\pi k}{2}}}{\text{sen} \left(\frac{\pi k}{4} \right) e^{-\frac{j\pi k}{4}}} \quad 125)$$

$$X_k = \frac{1}{4} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi k}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi k}{4} \right)} e^{-\frac{j\pi k}{4}} \forall k = 0,1,2,3. \quad 126)$$

Cuando k=0:



$$X_0 = \frac{1 \operatorname{sen}(0)}{4 \operatorname{sen}(0)} e^0$$

Por L'hôpital:

$$X_0 = \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi k}{2}\right) \left(-j \frac{\pi k}{4} e^{-\frac{j\pi k}{4}}\right) + e^{-\frac{j\pi k}{4}} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right)}$$

$$X_0 = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{2} \cos(0) e^0}{\frac{\pi}{4} \cos(0)} = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \quad 127)$$

De la misma manera, se obtienen los resultados en la ec. 128.

$$\begin{aligned} k = 1; X_1 &= \frac{1}{4}(1 - j) \\ k = 2; X_2 &= 0 \\ k = 3; X_3 &= \frac{1}{4}(1 + j) \end{aligned} \quad 128)$$

- iii. Verificando a través del programa en MATLAB se obtienen los coeficientes correspondientes (fig. 40)

```
Xk_eval =

    0.5000    0.2500 - 0.2500i    0 - 0.0000i    0.2500 + 0.2500i
```

Figura 40: verificación de la SFTD, señal original

Donde 'Xk_eval' corresponde a la variable dentro del script correspondiente que guarda el resultado del cálculo de los coeficientes.

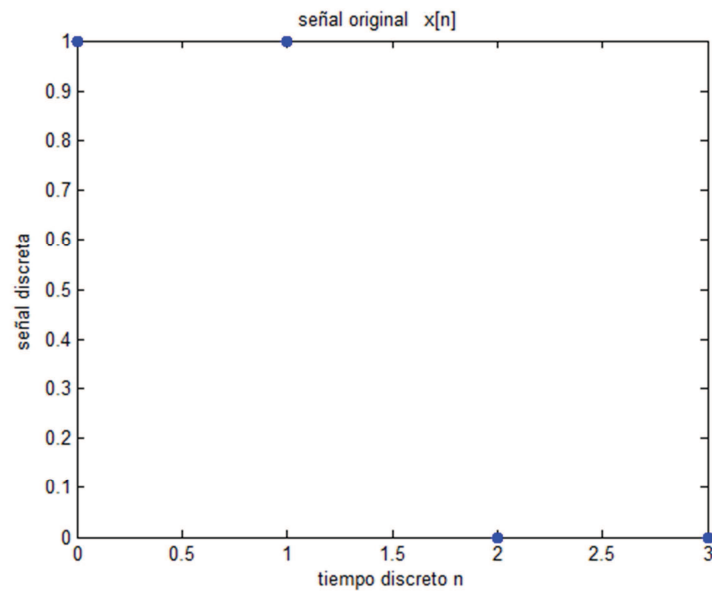


Figura 41: gráfica de la señal original

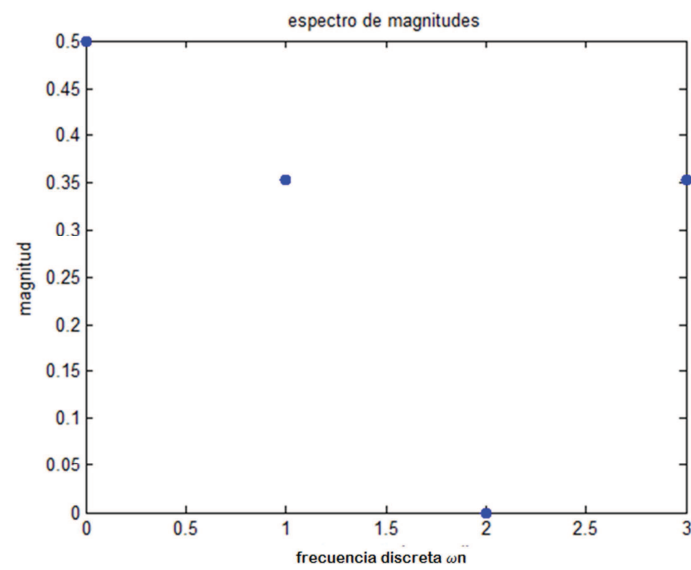


Figura 42: espectro de magnitudes,
señal original

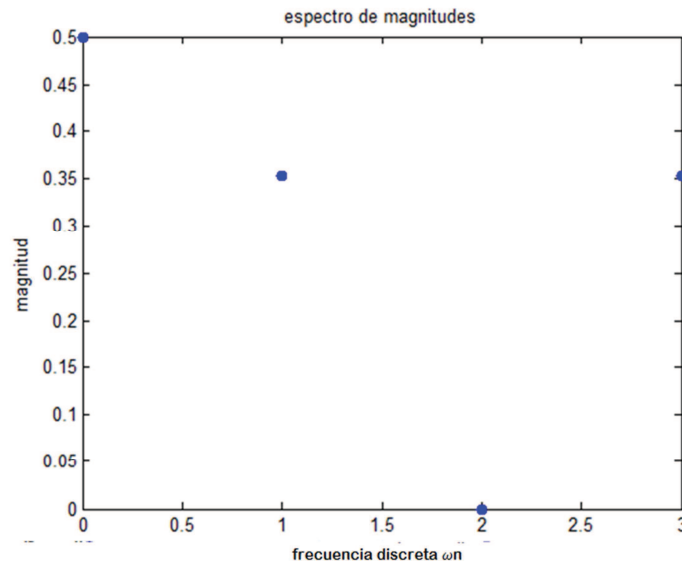


Figura 43: espectro de fases, señal original

Posteriormente partiendo de la señal asignada $x[n]$, se aplicó cada una de las siguientes propiedades:

a) **Desplazamiento en el tiempo** con $n_0 = 2$.

$$z[n] = x[n - n_0] \xleftrightarrow{SF} Z_k = X_k \left[e^{-\frac{2j(n_0)\pi k}{N}} \right] \quad 129)$$

Aplicando la propiedad directamente como se ve en la ec. 130

$$\begin{aligned} Z_k &= X_k \left[e^{-\frac{2j(2)\pi k}{4}} \right] \\ Z_k &= \frac{1}{4} \left[1 + e^{-\frac{j\pi k}{2}} \right] \left[e^{-\frac{j(2)\pi k}{2}} \right] \\ Z_k &= \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{2j\pi k}{2}} + e^{-\frac{3j\pi k}{2}} \right] \end{aligned} \quad 130)$$



Evaluando los valores desde $k = 0, 1, 2, 3$, se obtiene los resultados:

$$\begin{aligned}Z_{(0)} &= \frac{1}{2} \\Z_{(1)} &= \frac{1}{4}(-1 + j) \\Z_{(2)} &= 0 \\Z_{(3)} &= \frac{1}{4}(-1 - j)\end{aligned}$$

131)

Xk_eval =

0.5000 -0.2500 + 0.2500i 0 - 0.0000i -0.2500 - 0.2500i

Figura 44: verificación de la SFTD,
desplazamiento en el tiempo

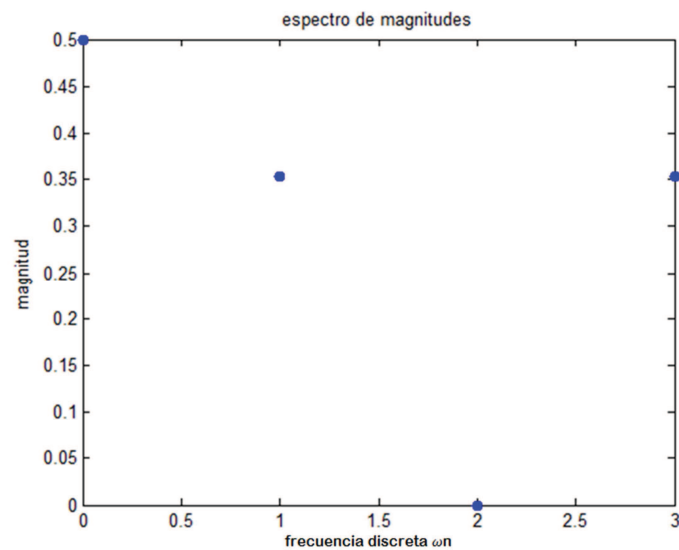


Figura 45: espectro de magnitudes,
desplazamiento en el tiempo

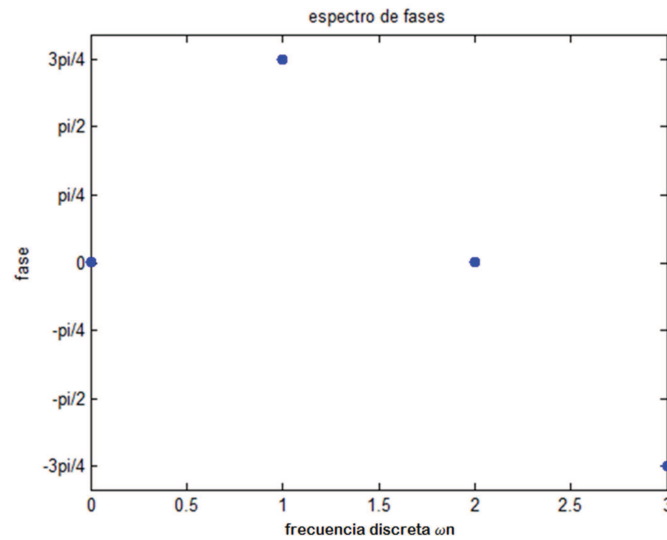


Figura 46: espectro de fases, desplazamiento en el tiempo

b) Desplazamiento en frecuencia con $k_0 = 2$

$$z[n] = x[n]e^{-\frac{2jn\pi k_0}{N}} \xleftrightarrow{SF} Z_k = X_{(k-k_0)} \quad 132)$$

Aplicando la propiedad directamente para obtener los coeficientes ec. 133, se tiene:

$$Z_k = X_{(k-k_0)} \quad 133)$$

Y el reflejo de los números negativos, se tienen los siguientes valores para Z_k =

$$\begin{aligned} Z_{(0)} &= X_{(-2)} = X_{(2)} = 0 \\ Z_{(1)} &= X_{(-1)} = X_{(3)} = \frac{1}{4}(1+j) \\ Z_{(2)} &= X_{(0)} = \frac{1}{2} \\ Z_{(3)} &= X_{(1)} = \frac{1}{4}(1-j) \end{aligned} \quad 134)$$

Verificando a través del programa en MATLAB se obtienen los correspondientes coeficientes (fig. 47)

```
Xk_eval =
    0      0.2500 + 0.2500i  0.5000 + 0.0000i  0.2500 - 0.2500i
```

Figura 47: verificación de la SFTD, desplazamiento en frecuencia

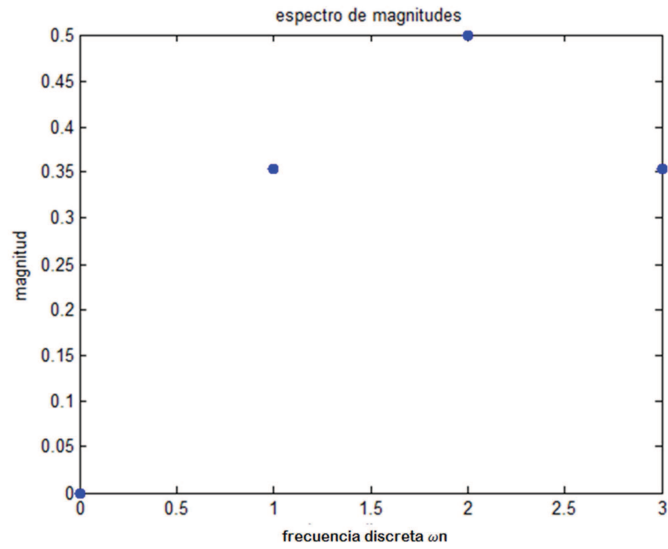


Figura 48: espectro de magnitudes, desplazamiento en frecuencia

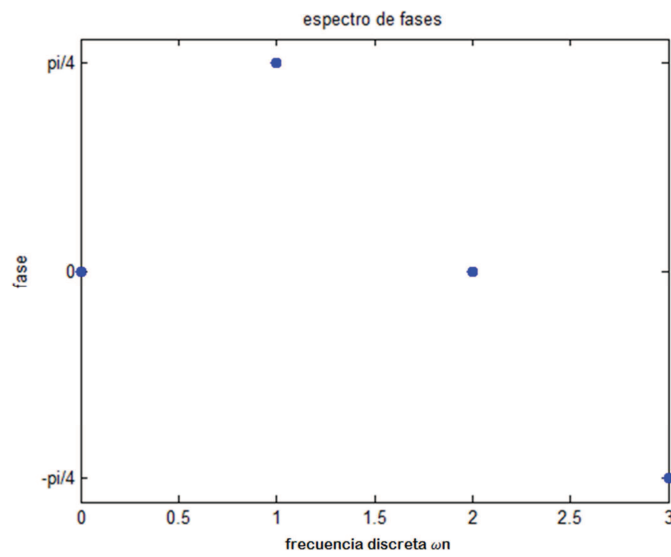


Figura 49: espectro de fases, desplazamiento en frecuencia

c) Conjugación.

$$x^*[n]_k \xleftrightarrow{SF} X^*[-k]$$

135)



Se tiene la siguiente señal:

$$x[n] = \{1,1,0,0\}. \quad 136)$$

Debido a que la señal asignada está formada por muestras puramente reales, la señal conjugada $x^*[n]$ es la misma en el tiempo discreto, sin embargo los coeficientes $X^*[-k]$ por ser entidades complejas, si presentan la conjugación en su parte compleja.

Calculando los coeficientes:

$$\begin{aligned} X^*[-k] = \\ X^*_{(0)} &= \frac{1}{4} \left[1 + e^{\frac{-j\pi(0)}{2}} \right] = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} \\ X^*_{(-1)} &= \frac{1}{4} \left[1 + e^{\frac{j\pi(-1)}{2}} \right] = \frac{1}{4} (1 - j) \\ X^*_{(-2)} &= \frac{1}{4} \left[1 + e^{\frac{j\pi(-2)}{2}} \right] = \frac{1}{4} (1 - 1) = 0 \\ X^*_{(-3)} &= \frac{1}{4} \left[1 + e^{\frac{j\pi(-3)}{2}} \right] = \frac{1}{4} (1 + j) \end{aligned} \quad 137)$$

Verificando a través del programa en MATLAB se obtienen los correspondientes coeficientes (fig. 50)

```
Xk_eval =  
  
0.5000      0.2500 - 0.2500i      0 - 0.0000i  0.2500 + 0.2500i
```

Figura 50: verificación de la SFTD, conjugación

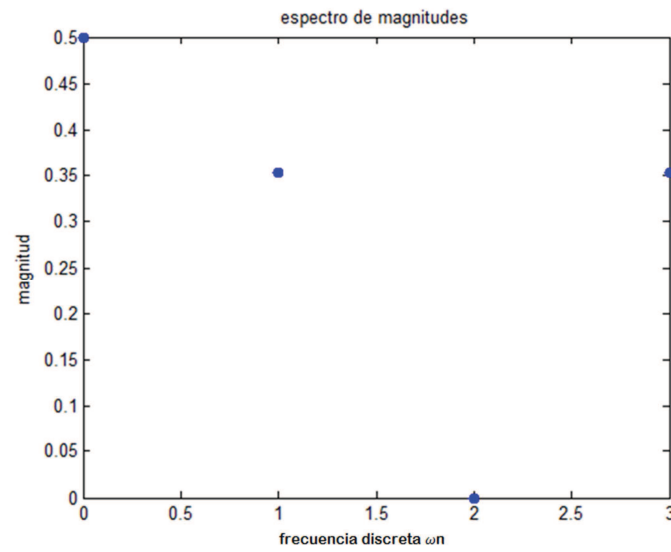


Figura 51: espectro de magnitudes, conjugación

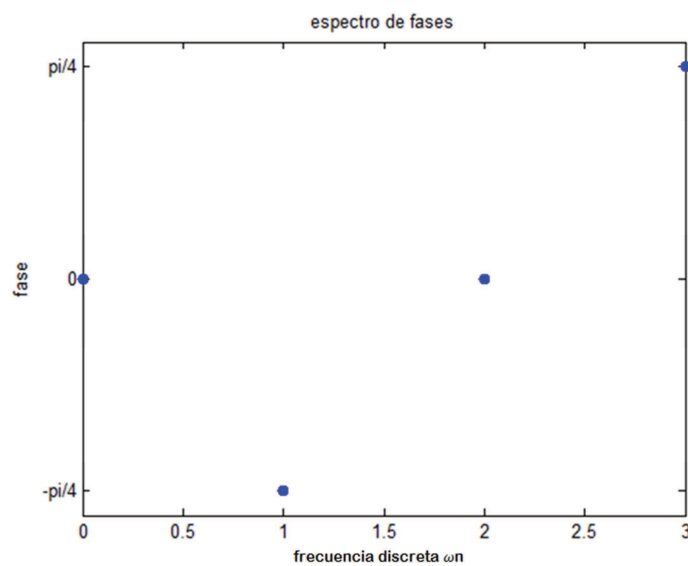


Figura 52: espectro de fases, conjugación

d) Inversión en el tiempo.

$$Z_k = x[-n] \xleftrightarrow{SF} X_{-k} \quad 138)$$



Se obtienen los coeficientes:

$$\begin{aligned} Z_{(0)} &= x[0]; X_{-k} = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{j\pi(0)}{2}} + 1 \right] = \frac{1}{2} \\ Z_{(1)} &= x[-1]; X_{-k} = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{j\pi(-1)}{2}} + 1 \right] = \frac{1}{4} (1 + j) \\ Z_{(2)} &= x[-2]; X_{-k} = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{j\pi(-2)}{2}} + 1 \right] = 0 \\ Z_{(3)} &= x[-3]; X_{-k} = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{j\pi(-3)}{2}} + 1 \right] = \frac{1}{4} (1 - j) \end{aligned} \quad 139)$$

Verificando a través del programa en MATLAB se obtienen los correspondientes coeficientes mostrados en la fig. 53

```
Xk_eval =  
0.5000      0.2500 + 0.2500i      0 - 0.0000i  0.2500 - 0.2500i
```

Figura 53: verificación de la SFTD,
inversión en el tiempo

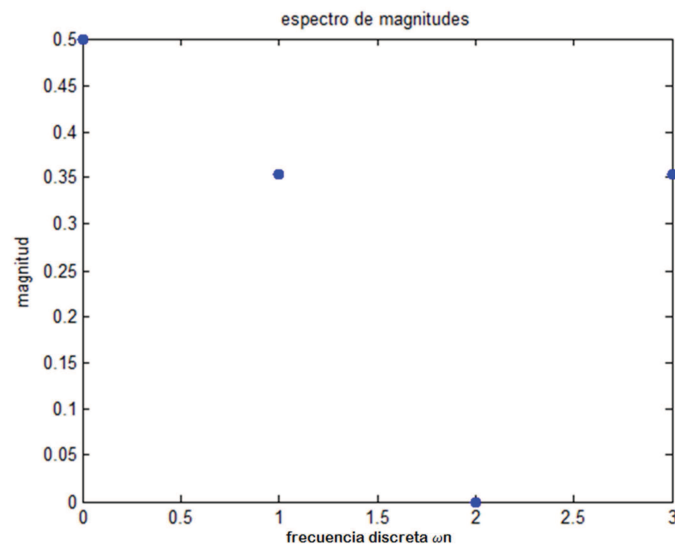


Figura 54: espectro de magnitudes,
inversión en el tiempo

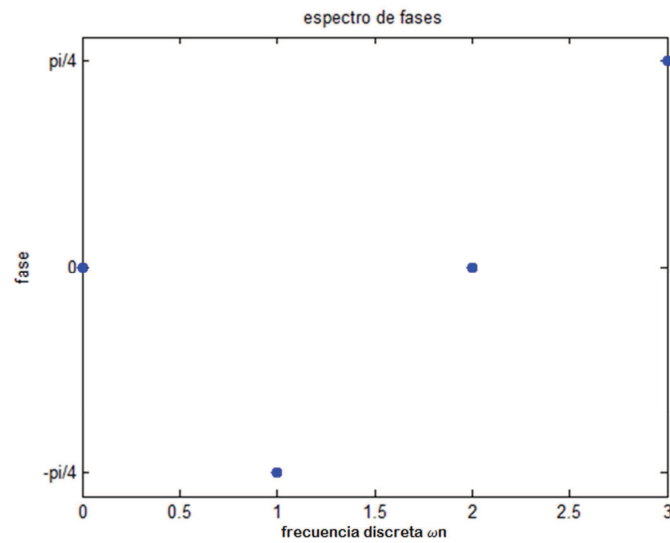


Figura 55: espectro de fases, inversión en el tiempo

e) Escalamiento en el tiempo.

$$z[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right]; & \forall \frac{n}{m} \text{ entero} \\ 0; & \forall \text{ otro caso} \end{cases} \quad (140)$$

$$Z_k \xrightarrow{SF} \frac{1}{m} X_k \quad (141)$$

A partir del desarrollo original para la secuencia asignada y sustituyendo m y X_k en el teorema (ec. 138):

$$Z_k = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \left[1 + e^{\frac{-j\pi k}{2}} \right] = \frac{1}{8} \left[1 + e^{\frac{-j\pi k}{2}} \right]$$

$$Z_0 = \frac{1}{4}$$

$$Z_1 = \frac{1}{8} (1 - j)$$

$$Z_2 = 0$$

$$Z_3 = \frac{1}{8} (1 + j)$$

(142)



Dado que se tiene la misma secuencia que la señal original (ec. 111), es irrelevante realizar la comprobación en MATLAB puesto que ya se tiene, siempre y cuando se tenga en cuenta que al utilizar esta propiedad, es necesario multiplicar la secuencia por el factor $\frac{1}{m}$ y aplicar la propiedad de linealidad.

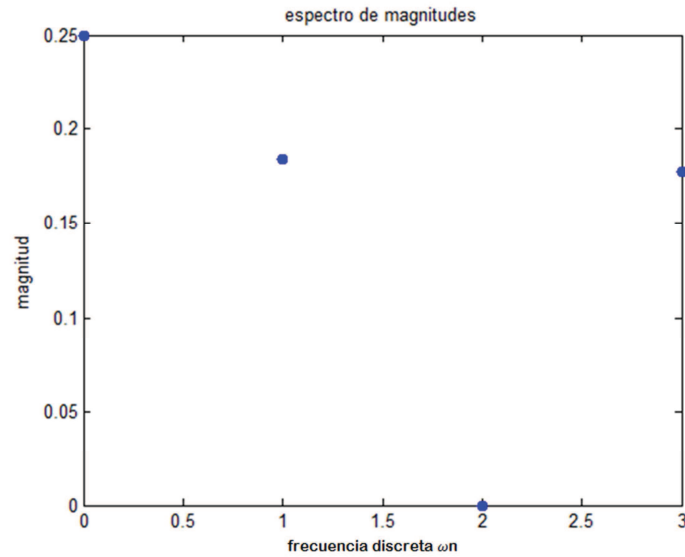


Figura 56: espectro de magnitudes, escalamiento en el tiempo

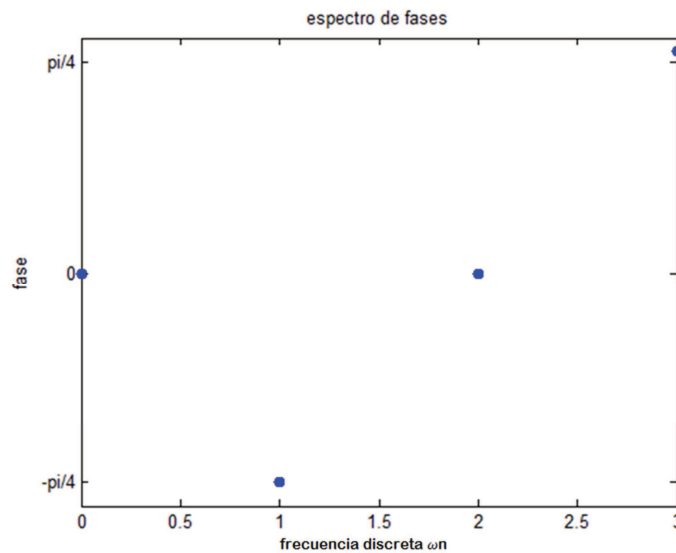


Figura 57: espectro de fases, escalamiento en el tiempo



f) Dualidad producto-convolución.

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{SF} X_k * Y_k \quad 143)$$

Se tienen las señales:

$$x[n] = \{1,1,0,0\} \text{ \& } y[n] = \{1,2,2,1\} \quad 144)$$

Donde:

$$\begin{aligned} x[n]y[n] &= \{1,2,2,1\}; \therefore X_k * Y_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n]y[n] e^{-\frac{2jn\pi k}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left[1 + 2e^{-\frac{j\pi k}{2}} \right] \end{aligned} \quad 145)$$

Desarrollando los coeficientes a partir de la fórmula anterior, se tiene (ec. 146)

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{3}{4} \\ Z_1 &= \frac{1}{4}(1 - 2j) \\ Z_2 &= -\frac{1}{4} \\ Z_3 &= \frac{1}{4}(1 + 2j) \end{aligned} \quad 146)$$

Verificando a través del programa en MATLAB se obtienen los correspondientes coeficientes en la fig. 58.

Xk_eval =			
0.7500	0.2500 - 0.5000i	-0.2500 - 0.0000i	0.2500 + 0.5000i

Figura 58: verificación de la SFTD,
dualidad producto-convolución



Es claro que evaluando los resultados ya obtenidos, el programa arroja el mismo resultado que la primera señal (ec. 121).

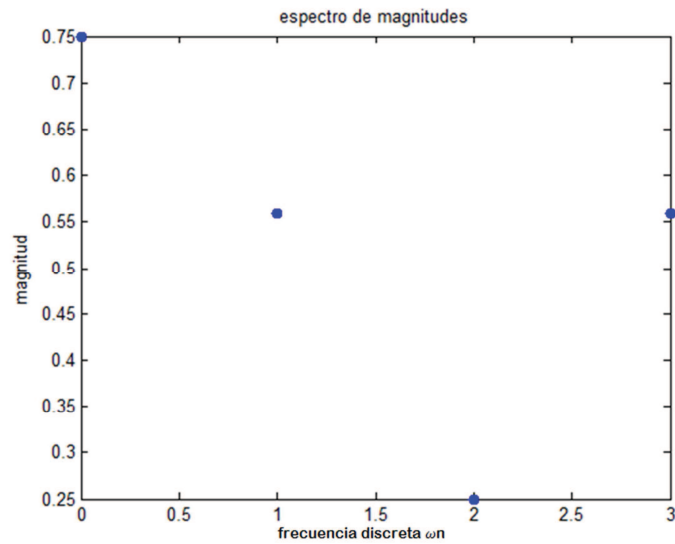


Figura 59: espectro de magnitudes, dualidad producto-convolución

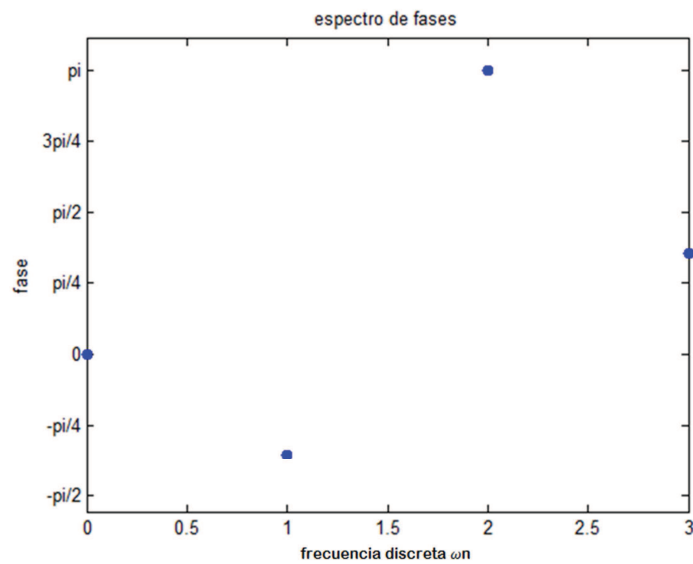


Figura 60: espectro de fases, dualidad producto-convolución



g) Primera diferencia hacia atrás.

$$z[n] = x[n] - x[n-1] \xrightarrow{SF} Z_k = X_k \left[1 - e^{-\frac{2jn_0\pi k}{N}} \right] \quad 147)$$

Aplicando el teorema (ec. 147) para $n_0 = 1, N = 4$ y sustituyendo X_k :

$$Z_k = \frac{1}{4} \left[1 + e^{-\frac{j\pi k}{2}} \right] \left[1 - e^{-\frac{2j\pi k}{4}} \right] = \frac{1}{4} \left[1 - e^{-\frac{j\pi k}{2}} + e^{-\frac{j\pi k}{2}} - e^{-j\pi k} \right]$$

$$Z_k = \frac{1}{4} [1 - e^{-j\pi k}] \quad 148)$$

Obteniendo los coeficientes para la $k=0,1,2,3$:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1}{2} \\ Z_1 &= 0 \\ Z_2 &= \frac{1}{2} \\ Z_3 &= 0 \end{aligned} \quad 149)$$

Para poder utilizar el programa de MATLAB, es necesario conocer la resta de la primera diferencia, por lo tanto es necesario conocer la resta de $x[n]$ con $x[n-1]$.

$$\begin{aligned} x[n] &= \{1,1,0,0\}; \quad x[n-1] = \{0,1,1,0\} \\ x[n] - x[n-1] &= \{1,0,-1,0\} \end{aligned} \quad 150)$$

Verificando a través del programa en MATLAB se obtienen los respectivos coeficientes (fig. 61)

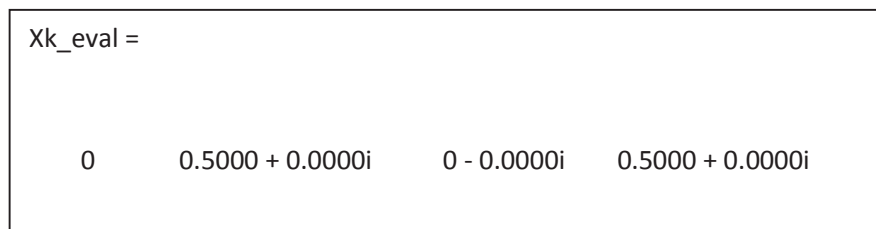


Figura 61: verificación de la SFTD,
primera diferencia hacia atrás



Por lo tanto se han obtenido los mismos resultados que los calculados anteriormente de la señal original (ec. 121).

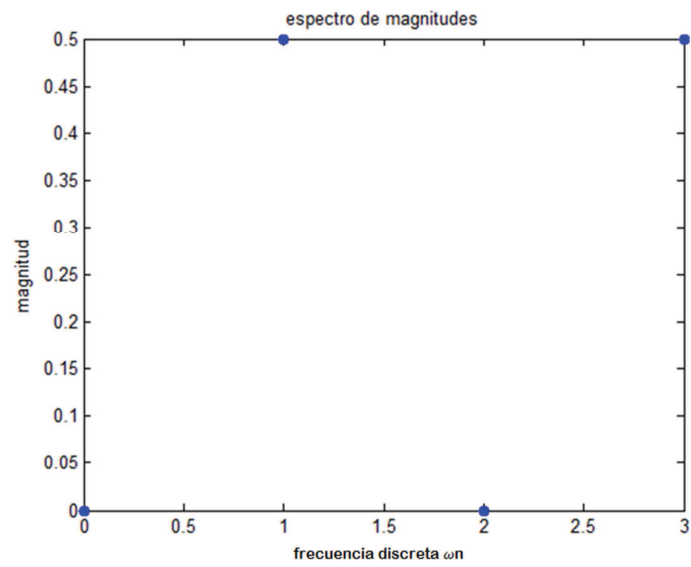


Figura 62: espectro de magnitudes, primera diferencia hacia atrás

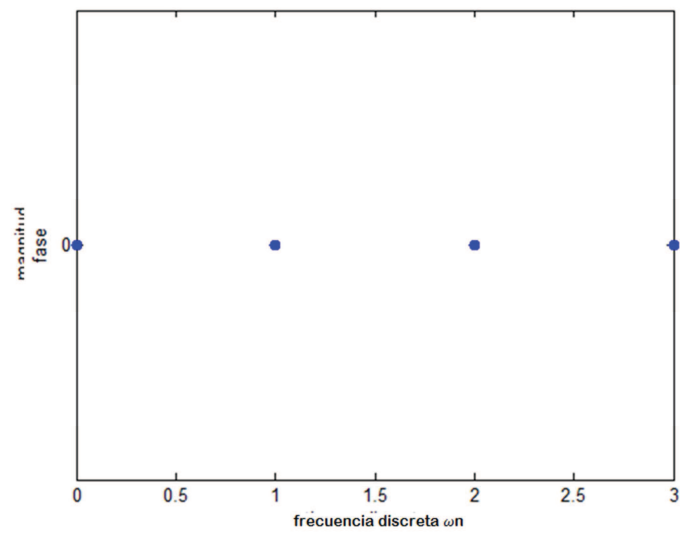


Figura 63: espectro de fases, primera diferencia hacia atrás



Se muestra el script en la fig. 64, fue desarrollado para calcular los coeficientes X_k de la SFTD.

```
function func2(x)
%N= input('N: ');
%x = input('x[n]: ');

[m1,n1] = size(x);

N = n1;

n = 0:1:(N-1);
magn = zeros([1,N]);
fase = zeros([1,N]);

Xk = 0;
syms k;

for i=1:N

    Xk = Xk+x(i)*exp(-j*2*(i-1)*pi*k/N);

end

pretty(Xk);

Xk_eval = zeros([1,N])
```

Figura 64: script para el cálculo de la SFTD



```
for i=1:N

    Xk_eval(1,i) = (1/N)*subs(Xk, k, (i-1));
    Xk_eval(1,i) = round(Xk_eval(1,i)*100)/100;
    fase(1,i) = angle(Xk_eval(1,i))*180/pi;
    magn(1,i) = abs(Xk_eval(1,i));

end

Xk_eval

figure; plot(n,magn,'o','LineWidth',2,'MarkerSize',5, 'MarkerFaceColor', [0 0 1]);
title('espectro de magnitudes') % se etiqueta el título de la función
xlabel('tiempo discreto n') % se etiqueta el eje de las ordenadas
ylabel('magnitud') % se etiqueta el eje de las abscisas

figure; plot(n,fase,'o','LineWidth',2,'MarkerSize',5, 'MarkerFaceColor', [0 0 1]);
title('espectro de fases') % se etiqueta el título de la función
xlabel('tiempo discreto n') % se etiqueta el eje de las ordenadas
ylabel('fase') % se etiqueta el eje de las abscisas
set(gca,'YTick',-180:45:180)
set(gca,'YTickLabel',{'-pi','-3pi/4','-pi/2','-pi/4','0','pi/4','pi/2','3pi/4','pi'})

figure; plot(n,x,'o','LineWidth',2,'MarkerSize',5, 'MarkerFaceColor', [0 0 1]);
title('señal original z[n]/x[n]') % se etiqueta el título de la función
xlabel('tiempo discreto n') % se etiqueta el eje de las ordenadas
ylabel('fase') % se etiqueta el eje de las abscisas

end
```

Figura 64: script para el cálculo de la SFTD



REQUISITOS DE ENTREGA:

- Grafique la señal periódica (periodo fundamental) discreta $x[n]$ asignada.
- Una vez obtenidos los coeficientes de la serie de Fourier X_k grafique los espectros de magnitud y fase de cada propiedad.

CUESTIONARIO:

1. Es posible notar, con la propiedad de conjugación, que existen señales que tienen parte compleja. En base al curso de teoremas de circuitos ¿qué sucede cuando una señal posee parte compleja?, ¿qué se aprecia en un osciloscopio cuando esto sucede?
2. De las señales propuestas, a cuáles se le puede aplicar visiblemente la conjugación?
3. ¿qué pasa con una señal cuadrada a diferencia de una función seno al aplicar una entrada compleja?
4. Cuando se grafican los espectros de fase pueden surgir errores cuando los resultados no están redondeados, ¿qué error puede ocurrir si el valor de la parte real o la parte imaginaria son extremadamente pequeños dado que se tienen cálculos producto de una evaluación numérica no exacta?
5. Cuando la señal digital $x[n]$ está formada por muestras puramente reales ¿qué sucede con la propiedad de conjugación al momento de calcular los coeficientes $X^*_{[-k]}$ de la serie de Fourier?
6. Para realizar las gráficas y operaciones en MATLAB, ¿qué puede decir de que un código sea reutilizable?
7. ¿Qué representa el espectro de magnitud?
8. ¿Qué representa el espectro de fase?
9. ¿Cuáles son las diferentes formas para calcular la SFTD?
10. ¿Qué representa la SFTD?



4.3 Práctica 6: Transformada Discreta de Fourier

OBJETIVO GENERAL:

El alumno calculará la transformada de Fourier discreta de secuencias finitas como caso particular de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) El alumno identificará la relación que existe entre la serie de Fourier en tiempo discreto y la transformada de Fourier discreta.
- ii) Esta práctica tiene la intención de servir de base para implementar la transformada rápida de Fourier en la práctica 7.

INTRODUCCIÓN:

Se tiene el siguiente cuadro sinóptico que resume las características de la DFT y la SFTD:

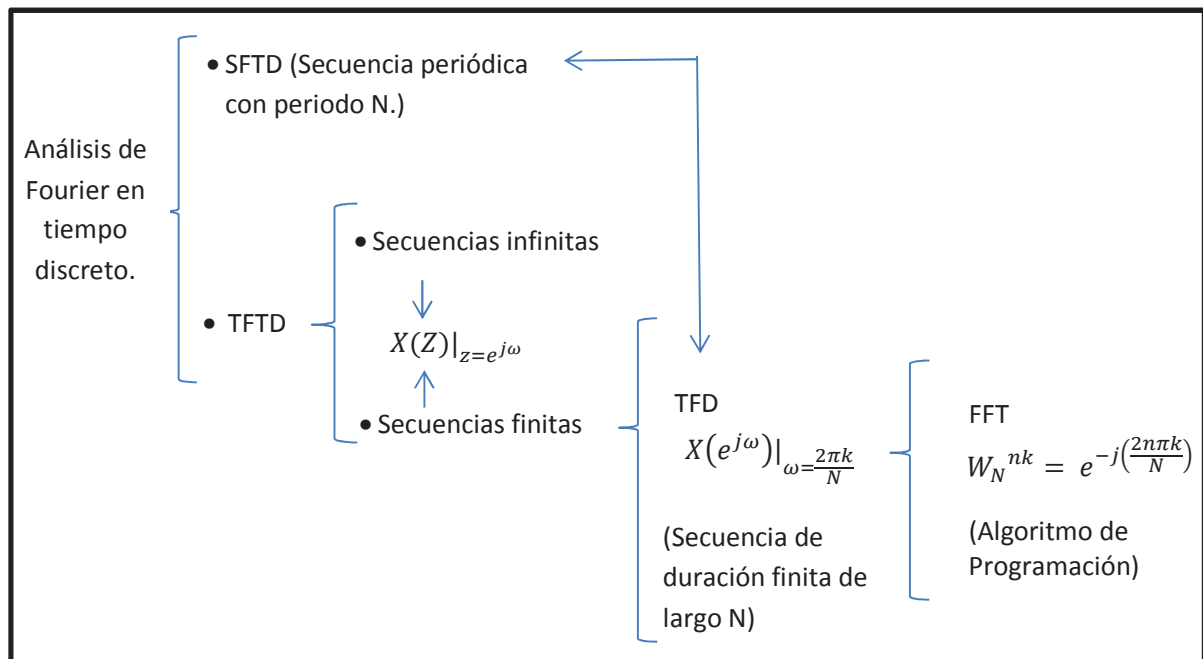


Figura 65: Diagrama DFT y SFTD



Nota:

- El cambio de variable $z = e^{j\omega}$ permite relacionar a la transformada z con la transformada de Fourier, siempre y cuando $|z| = 1$ (circunferencia unitaria) esté contenida en la ROC.
- Los polos deben estar contenidos dentro del círculo unitario, ya que si están sobre este no existe la TFTD

Como se sabe, la serie de Fourier en tiempo discreto, actúa sobre una señal que es periódica (fig. 64 a). Ahora bien, si se considera únicamente el periodo fundamental (fig. 64 b), se obtendría la Transformada de Fourier Discreta que se aplica a secuencias de duración finita.

Este hecho deja ver que existe una relación directa entre la SFTD y la TFD, de la siguiente forma:

$$X_{TFD}(k) = N X_{SFTD}(k) \quad (151)$$

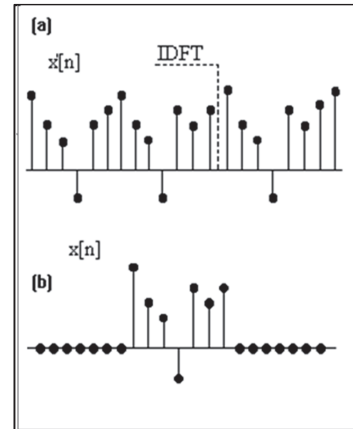


Figura 66: DFT & SFTD

Las expresiones de análisis y síntesis de la serie de Fourier discreta son:

Ecuación de análisis:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad \forall 0 \leq k \leq N-1; \quad (152)$$

Ecuación de síntesis:

$$X(k) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad \forall 0 \leq k \leq N-1; \quad (153)$$

Donde

$$\omega = \frac{2\pi k}{N} \quad (154)$$

Es posible simplificar las fórmulas anteriores utilizando la igualdad de la ec. 155.



$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \quad 155)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}; \forall 0 \leq k \leq N-1 \quad 156$$

$$X_{(k)} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}; \forall 0 \leq k \leq N-1 \quad 157)$$

Cabe destacar que el cambio de variable $W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$ es el principio que conduce a la expresión matemática que define a la transformada rápida de Fourier, el cual básicamente se reduce a un algoritmo de programación de dicha expresión.

Existen paralelamente a estas expresiones, la representación matricial de la transformada de Fourier discreta, mediante la cual es posible calcular la transformada directa e inversa de Fourier, para ello se utilizan las expresiones mostradas a continuación:

Forma directa:

$$X = D_N \cdot x \quad 158)$$

Donde X es un vector compuesto por las N muestras de la TFD, es decir:

$$X = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T \quad 159)$$

Mientras que x es el vector de N muestras de entrada:

$$x = (x[0], x[1], \dots, x[N-1])^T \quad 160)$$

Y D_N es la matriz TDF de NxN dada por la ec. 161.



$$D_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad 161)$$

De la misma forma, las relaciones de la TDF inversa se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = D_N^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad 162)$$

Donde:

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad 163)$$

$$W_N^n = e^{-j\frac{2\pi(n)}{N}} \quad 164)$$

En la tabla 18 se muestra una tabla con las propiedades de la transformada de Fourier más relevantes.



PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER		
Sean $x[n]$ & $y[n]$ señales periódicas discretas con periodo fundamental N y con transformada discreta de Fourier $X_{(k)}$ & $Y_{(k)}$ respectivamente y con periodo 2π , sean α y β constantes arbitrarias.		
Propiedad	Señal periódica	Coeficientes de la transformada de Fourier
Linealidad.	$\alpha x[n] + \beta y[n]$	$\alpha X_{(k)} + \beta Y_{(k)}$
Desplazamiento en el tiempo.	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega_0 n_0} X_{(k)}$
Desplazamiento en la frecuencia.	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X_{(k-k_0)N}$
Escalamiento.	$z_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right]; & \text{si } \frac{n}{m} \text{ entero con } N_z = mN_x \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$ <i>periódica con periodo kN</i>	$\frac{1}{m} X_{(k)}$
Periodicidad.	$x[n] = x[n + N]$	$X_{(k)} = X_{(k+N)}$
Convolución.	$x[n] * y[n]$	$X_{(k)} Y_{(k)}$
Inversión temporal.	$x[N - n]$	$X_{(N-k)} = X_{(-k)N}$
Convolución circular.	$x[n] * y[n]$	$X_{(k)}$
Conjugación compleja.	$x^*[n]$	$X_{(N-k)}^* = X_{(-k)N}^*$
Multiplicación de 2 secuencias.	$x[n]y[n]$	$X_{(k)} * Y_{(k)}$
Teorema de Parseval.	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X_{(k)} Y_{(k)}^*$

Tabla 18: propiedades de la transformada discreta de Fourier



INFORMACIÓN ADICIONAL

El procesamiento digital de señales fue impulsado, como ya se ha mencionado, por motivos bélicos; una de las aplicaciones más claras de este tipo de procesamiento es el radar, esta tecnología ha dado lugar al uso de varias técnicas y recursos matemáticos como la transformada z , la transformada discreta de Fourier y otras más, por poner un ejemplo: JTFT (Joint Time Frequency Transform).

Para comprender cómo es que son utilizadas las herramientas de la transformada z y la transformada de Fourier, es necesario aclarar que un radar básicamente emite pulsos y al ser reflejados, este los vuelve a captar, sin embargo el ruido presente en el ambiente hace que el análisis de la información que se obtiene a partir de un radar sea difícil de procesar y por ello sea necesario aplicar diversas técnicas para obtener una salida adecuada que permita por ejemplo, saber qué clase de avión está próximo a un objetivo [10].

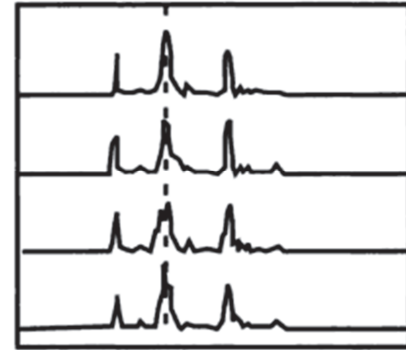


Figura 67: pulso de radar

En el caso de la transformada discreta de Fourier, se muestra un esquema a la derecha sobre como un radar ISAR emplea la transformada inversa para obtener la información de un blanco en movimiento considerando los movimientos característicos de un avión (yaw, pitch, roll); el mecanismo emplea N ráfagas de pulsos en el dominio de la frecuencia para así obtener la firma en frecuencia del objetivo, cada ráfaga, como lo muestra el diagrama, consiste en M pulsos en frecuencia de corto ancho de banda, la frecuencia central de los M pulsos sucesivos enviados es incrementada para así obtener la firma del avión u objetivo en frecuencia.

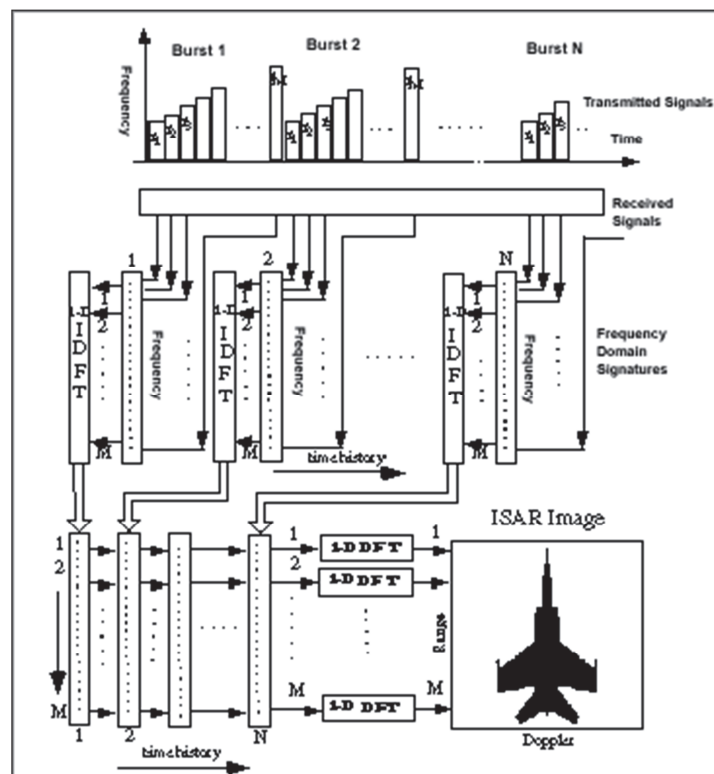


Figura 68: funcionamiento del radar tipo ISAR

Cuando es corregido el factor de movimiento de rotación y traslación del avión, las firmas en frecuencia del blanco pueden ser tratadas como el historial de la reflectividad del blanco en el dominio de frecuencias discretas.



Tomando los M puntos de cada ráfaga de pulsos de frecuencia y obteniendo su correspondiente transformada inversa, se tendrán N perfiles conteniendo M células cada uno. Las muestras tomadas en la misma célula dentro de los N perfiles constituyen una serie que es un historial en tiempo, la DFT de este historial (de una correspondiente célula dentro de los N perfiles), provee un espectro Doppler de N puntos. Finalmente, combinando el espectro Doppler de todas las M células, la imagen de dimensión $M \times N$ del radar tipo ISAR (radar de apertura sintética inversa por sus siglas en inglés) es formada, la resolución del radar ISAR de pulsos en frecuencia, es determinada por el ancho de banda de las ráfagas, en este caso M veces el ancho de banda del pulso; la resolución del espectro Doppler es determinada por el tiempo de observación (número de ráfagas N), un tiempo más largo provee mejor resolución y una mejor proporción señal-ruido, sin embargo causa más errores de rango y fase [10].

INSTRUCCIONES:

Sean las siguientes señales finitas de longitud finita:

$$1) \ x[n] = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ \uparrow \end{matrix} \right\} \quad 165)$$

$$2) \ x[n] = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \uparrow \end{matrix} \right\} \quad 166)$$

$$3) \ x[n] = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \uparrow \end{matrix} \right\} \quad 167)$$

$$4) \ x[n] = \left\{ \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ \uparrow \end{matrix} \right\} \quad 168)$$

$$5) \ x[n] = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ \uparrow \end{matrix} \right\} \quad 169)$$

$$6) \ x[n] = \cos^2(n\pi) \quad 170)$$

$$7) \ x[n] = \text{senc} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \quad 171)$$

$$8) \ x[n] = \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \quad 172)$$

$$9) \ x[n] = \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \quad 173)$$

$$10) \ x[n] = \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)}{n\pi} \quad 174)$$

Nota: En las señales de los incisos 6 a 10, la longitud finita considera únicamente el periodo fundamental.

Calcular la TFD ($X(k)$) de la función asignada:

- i. Empleando la fórmula general de análisis.



- ii. Una vez obtenidos los valores de la TFD, revierta el proceso y recupere la $x[n]$ usando la ecuación de síntesis.
- iii. Empleando un script desarrollado por usted en MATLAB, calcule en forma matricial la transformada de Fourier discreta en forma directa e inversa.

Posteriormente partiendo de la señal tratada, aplique las siguientes propiedades tomando en cuenta las especificaciones correspondientes:

- a) Linealidad.
- b) Desplazamiento en el tiempo con $n_0 = 2$.
- c) Desplazamiento en frecuencia con $k_0 = 2$
- d) Inversión temporal.

Nota: para la propiedad de linealidad y convolución, proponga la señal $y[n]$.

- 1) Partiendo de los coeficientes X_k obtenidos en el inciso i. Calcular los nuevos coeficientes de la TFD en cada una de las propiedades indicadas (inciso a-d).
- 2) Calcular los nuevos coeficientes X_k a partir de la modificación de la secuencia $x[n]$ en cada propiedad.
- 3) Comparar los coeficientes X_k obtenidos en el inciso 1 y 2.

Nota: los resultados deben ser iguales.

OBSERVACIONES:

- i. Apoyarse en el toolbox presente a continuación.
- ii. Evitar el uso del comando `fft`.
- iii. Desplegar resultados en la ventana de comandos.

LISTA DE COMANDOS	
function salidas = nombre_función(argumentos);	
syms	
zeros([m,n]);	

Tabla 19: lista de comandos 6

**DESARROLLO:**

Calcular la TFD ($X_{(k)}$) de la función asignada (ec. 165)

- i. Empleando la fórmula general de análisis.

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nk}$$

$$= 1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \quad \forall k = 0,1,2,3. \quad 175)$$

Cuando $k=0$:

$$x(0) = 6 \quad 176)$$

Cuando $k=1$:

$$x(1) = 1 + 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + 2(\cos(\pi) - j \sin(\pi))$$

$$+ \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

$$= 1 + 2(-j) + 2(-1) + j = 1 - j \quad 177)$$

Cuando $k=2$:

$$x(2) = 1 + 2(\cos(\pi) - j \sin(\pi)) + 2(\cos(2\pi) - j \sin(2\pi))$$

$$+ (\cos(3\pi) - j \sin(3\pi))$$

$$= 1 + 2(-1) + 2(1) - j = 0 \quad 178)$$

Cuando $k=3$:

$$x(3) = 1 + 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) + 2(\cos(3\pi) - j \sin(3\pi))$$

$$+ \left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) \right)$$

$$= 1 + 2(j) + 2(-1) - j = -1 + j \quad 179)$$



$$X(k) = \begin{cases} 6; k = 0 \\ -1 - j; k = 1 \\ 0; k = 2 \\ -1 + j; k = 3 \end{cases}$$

180)

Nota: $X(k)$ expresada en forma rectangular.

- ii. Una vez obtenidos los valores de la TFD, revierta el proceso y recupere la $x[n]$ usando la ecuación de síntesis.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}; \forall 0 \leq k \leq N-1 \quad 181)$$

Cuando $n=0$:

$$\begin{aligned} x[0] &= \frac{1}{4} [X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] \\ &= \frac{1}{4} [6 - 1 - j - 1 + j] = \frac{1}{4} (4) = 1 \end{aligned} \quad 182)$$

Cuando $n=1$:

$$\begin{aligned} x[1] &= \frac{1}{4} [X(0) + X(1)e^{j\frac{\pi}{2}} + X(2)e^{j\pi} + X(3)e^{j\frac{3\pi}{2}}] \\ &= \frac{1}{4} \left[6 + (-1 - j) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + (-1 + j) \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} [6 + (-1 - j)(j) + (-1 + j)(-j)] = \frac{1}{4} [6 - j + 1 + j + 1] \\ &= \frac{1}{4} [6 + 1 + 1] = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned} \quad 183)$$

Cuando $n=2$:

$$\begin{aligned} x[2] &= \frac{1}{4} [X(0) + X(1)e^{j\pi} + X(2)e^{j2\pi} + X(3)e^{j3\pi}] \\ &= \frac{1}{4} [6 + (-1 - j)(\cos(\pi) + j \sin(\pi)) + (-1 + j)(\cos(3\pi) + j \sin(3\pi))] \end{aligned} \quad 184)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}[6 + (-1 - j)(-1) + (-1 + j)(-1)] \\
 &= \frac{1}{4}[6 + 1 + j + 1 - j] = \frac{8}{4} = 2
 \end{aligned}
 \tag{185}$$

Cuando $n=3$:

$$\begin{aligned}
 x[3] &= \frac{1}{4}[X(0) + X(1)e^{j\frac{3\pi}{2}} + X(2)e^{j3\pi} + X(3)e^{j\frac{9\pi}{2}}] \\
 &= \frac{1}{4}\left[6 + (-1 - j)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) + (-1 + j)\left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right)\right] \\
 &= \frac{1}{4}[6 + (-1 - j)(-j) + (-1 + j)(j)] = \frac{1}{4}(6 + 2j^2) = \frac{1}{4}(6 - 2) = 1
 \end{aligned}
 \tag{186}$$

- iii. Empleando un script desarrollado por usted. en MATLAB, calcule en forma matricial la transformada de Fourier discreta en forma directa e inversa.

Utilizando el script que fue desarrollado utilizando los siguientes comandos:

```
b = DFT2([1 2 2 1]);
a = IDFT2([(6) (-1-j) (0) (-1+j)]);
```

Y se obtuvieron las salidas de la figura 69:

```

1
-----
/ pi n i \
exp| ----- |
\ 2 /

D =
1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
1.0000    0.0000 + 1.0000i -1.0000 + 0.0000i -0.0000 - 1.0000i
1.0000   -1.0000 + 0.0000i  1.0000 - 0.0000i -1.0000 + 0.0000i
1.0000   -0.0000 - 1.0000i -1.0000 + 0.0000i  0.0000 + 1.0000i

xbis =

6.0000
-1.0000 - 1.0000i
0
-1.0000 + 1.0000i

y =
1.0000
2.0000 - 0.0000i
2.0000 - 0.0000i
1.0000 + 0.0000i

```

Figura 69: salida del script para la DFT.



(Figura 69) Donde se aprecia la expresión simbólica W_N^n , la matriz directa D , la transformada directa 'xbis' y el resultado de la transformada inversa 'y'.

Aplicar las propiedades de:

e) Linealidad.

Sea

$$x[n] = \{1, 2, 2, 1\} \quad (187)$$

se propone

$$y[n] = \{-1, 0, 1, 0\}; \alpha = 2 \text{ \& } \beta = -1 \quad (188)$$

Calcular:

$$\begin{aligned} \alpha x[n] + \beta y[n] &= 2\{1, 2, 2, 1\} + (-1)\{-1, 0, 1, 0\} \\ &= \{2, 4, 4, 2\} + \{1, 0, -1, 0\} = \{3, 4, 3, 2\} \end{aligned} \quad (189)$$

Dado que:

$$x[n] \overset{TFD}{\longleftrightarrow} X_{(k)}; y[n] \overset{TFD}{\longleftrightarrow} Y_{(k)} \quad (190)$$

Entonces:

$$2x[n] \overset{TFD}{\longleftrightarrow} 2X_{(k)} = \begin{cases} 2 * 6 = 12; k = 0 \\ 2(-1 - j) = -2 - 2j; k = 1 \\ 2(0) = 0; k = 2 \\ 2(-1 + j) = -2 + 2j; k = 3 \end{cases} \quad (191)$$

Comprobando el resultado de $2X_{(k)}$ a partir de la secuencia

$$2x[n] = \{2, 4, 4, 2\} \quad (192)$$

$$\begin{aligned} X_{(k)} &= \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nk} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3 \\ &= 2 + 4e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 4e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (193)$$



Cuando $k=0$:

$$x(0) = 2 + 4 + 4 + 2 = 12 \quad 194)$$

Cuando $k=1$:

$$\begin{aligned} x(1) &= 2 + 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + 4(\cos(\pi) - j \sin(\pi)) \\ &\quad + 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) \\ &= 2 + 4(-j) + 4(-1) + 2j = -2 - 2j \end{aligned} \quad 195)$$

Cuando $k=2$:

$$\begin{aligned} x(2) &= 2 + 4(\cos(\pi) - j \sin(\pi)) + 4(\cos(2\pi) - j \sin(2\pi)) \\ &\quad + 2(\cos(3\pi) - j \sin(3\pi)) \\ &= 2 + 4(-1) + 4(1) - 2 = 0 \end{aligned} \quad 196)$$

Cuando $k=3$:

$$\begin{aligned} x(3) &= 2 + 4 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) + 4(\cos(3\pi) - j \sin(3\pi)) \\ &\quad + 2 \left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) \right) \\ &= 2 + 4(j) + 4(-1) - 2j = -2 + 2j \end{aligned} \quad 197)$$

Los resultados son los mismos. (ec. 190, ec 193, ec. 194, ec. 195, ec. 196)

Calculando ahora la TFD de $y[n]$:

$$y[n] = 2\{1, 2, 2, 1\} \quad 198)$$

$$\begin{aligned} Y_{(k)} &= \sum_{n=0}^3 y[n] e^{-j \frac{2n\pi k}{4}}; \forall k = 0, 1, 2, 3. \\ &= -1 + e^{-j\pi k}; \forall k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad 199)$$

Cuando $k=0$:

$$Y_{(0)} = -1 + 1 = 0 \quad 200)$$

Cuando $k=1$:



$$Y_{(1)} = -1 + e^{-j\pi} = -1 + (-1) = -2 \quad 201)$$

Cuando k=2:

$$Y_{(2)} = -1 + e^{-j2\pi} = -1 + 1 = 0 \quad 202)$$

Cuando k=3:

$$Y_{(3)} = -1 + e^{-j3\pi} = -1 + (-1) = -2 \quad 203)$$

$$\therefore \beta y[n] = (-1)y[n] = \{1, 0, -1, 0\}. \quad 204)$$

Se tiene como DFT a:

$$(-1)Y_{(k)} = \begin{cases} 0; & k = 0 \\ 2; & k = 1 \\ 0; & k = 2 \\ 2; & k = 3 \end{cases} \quad 205)$$

Comprobando este resultado, se calcula la TFD a partir de la secuencia de la ec. 203.

$$\begin{aligned} Y_{(k)} &= \sum_{n=0}^3 y[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nk} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3 \\ &= 1 - e^{-j\pi k}; \quad \forall k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad 206)$$

Cuando k=0:

$$Y_{(0)} = 1 - 1 = 0 \quad 207)$$

Cuando k=1:

$$Y_{(1)} = 1 - e^{-jk} = 1 - (-1) = 2 \quad 208)$$

Cuando k=2:

$$Y_{(2)} = 1 - e^{-j2\pi} = 1 - (1) = 0 \quad 209)$$

Cuando k=3:

$$Y_{(3)} = 1 - e^{-j3\pi} = 1 - (-1) = 2 \quad 210)$$



Así:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] = 2\{1,2,2,1\} + (-1)\{-1,0,1,0\} = \{3,4,3,2\} \quad 211)$$

Debe tener como TFD a:

$$2 X_{(k)} + (-1)Y_{(k)} = \begin{cases} 12; k=0 \\ -2-2j; k=1 \\ 0; k=2 \\ -2+2j; k=3 \end{cases} + \begin{cases} 0; k=0 \\ 2; k=1 \\ 0; k=2 \\ 2; k=3 \end{cases} = \begin{cases} 12; k=0 \\ -2j; k=1 \\ 0; k=2 \\ 2j; k=3 \end{cases} \quad 212)$$

Calculando ahora la TFD a partir de la secuencia

$$2\{1,2,2,1\} + (-1)\{-1,0,1,0\} = \{3,4,3,2\} = z[n] \quad 213)$$

Para verificar el resultado anterior:

$$\begin{aligned} 2 X_{(k)} + (-1)Y_{(k)} &= \sum_{n=0}^3 z[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nk} \quad \forall k = 0,1,2,3 \\ &= 3 + 4 e^{-j\left(\frac{\pi k}{2}\right)} + 3e^{-j\pi k} + 2e^{-j\left(\frac{3\pi k}{2}\right)}; \quad \forall k = 0,1,2,3 \end{aligned} \quad 214)$$

Cuando k=0:

$$2 X_{(0)} + (-1)Y_{(0)} = 3 + 4(1) + 3(1) + 2(1) = 12 \quad 215)$$

Cuando k=1:

$$\begin{aligned} 2 X_{(1)} + (-1)Y_{(1)} &= 3 + 4 e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 3e^{-j\pi} + 2e^{-j\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &= 3 + 4(-j) + 3(-1) + 2(j) = -2j \end{aligned} \quad 216)$$

Cuando k=2:

$$\begin{aligned} 2 X_{(2)} + (-1)Y_{(2)} &= 3 + 4 e^{-j\left(\frac{2\pi}{2}\right)} + 3e^{-j\pi 2} + 2e^{-j\left(\frac{3\pi 2}{2}\right)} \\ &= 3 + 4(-1) + 3(1) + 2(-1) = 0 \end{aligned} \quad 217)$$

Cuando k=3:

$$2 X_{(3)} + (-1)Y_{(3)} = 3 + 4 e^{-j\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + 3e^{-j3\pi} + 2e^{-j\left(\frac{9\pi}{2}\right)}$$



$$= 3 + 4(j) + 3(-1) + 2(-j) = 2j \quad 218)$$

Los resultados de ambos desarrollos son los mismos.

f) Desplazamiento circular en el tiempo con $n_0 = 2$.

Si:

$$x[n] = \{1, 2, 2, 1\}, \text{ con: } X_{(k)} = \begin{cases} 6; k = 0 \\ -1 - j; k = 1 \\ 0; k = 2 \\ -1 + j; k = 3 \end{cases} \quad 219)$$

$$\rightarrow x[n - 2] = \{2, 1, 1, 2\}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{TFD} X_{(k)} e^{-j\left(\frac{2\pi kn_0}{N}\right)}; \forall k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad 220)$$

Se tiene:

$$X_{(k)} e^{-j\left(\frac{2\pi kn_0}{N}\right)} = X_{(k)} e^{-j\pi k}; \forall k = 0, 1, 2, 3$$

$$X_{(k)} = \begin{cases} 6(1) = 6; k = 0 \\ (-1 - j)e^{-j\pi} = 1 + j; k = 1 \\ (0)e^{-j2\pi} = 0; k = 2 \\ (-1 + j)e^{-j3\pi} = 1 - j; k = 3 \end{cases} \quad 221)$$

Partiendo directamente de la secuencia resultante de haber aplicado el desplazamiento temporal circular a $x[n]$. Para verificar los resultados anteriores se tiene:

$$z[n] = x[n - 2] = \{2, 1, 1, 2\} \quad 222)$$

Calculando $Z_{(k)}$:

$$Z_{(k)} = \sum_{n=0}^3 z[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3$$

$$= 2 + e^{-j\left(\frac{\pi k}{2}\right)} + e^{-j\pi k} + 2e^{-j\left(\frac{3\pi k}{2}\right)} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3 \quad 223)$$



Cuando $k=0$:

$$Z_{(0)} = 2 + 1 + 1 + 2 = 6$$

224)

Cuando $k=1$:

$$\begin{aligned} Z_{(1)} &= 2 + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\pi} + 2e^{-j\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &= 2 + (-j) + (-1) + 2(j) = 1 + j \end{aligned}$$

225)

Cuando $k=2$:

$$\begin{aligned} Z_{(2)} &= 2 + e^{-j\left(\frac{2\pi}{2}\right)} + e^{-j2\pi} + 2e^{-j\left(\frac{6\pi}{2}\right)} \\ &= 2 + (-1) + (1) + 2(-1) = 0 \end{aligned}$$

226)

Cuando $k=3$:

$$\begin{aligned} Z_{(3)} &= 2 + e^{-j\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + e^{-j3\pi} + 2e^{-j\left(\frac{9\pi}{2}\right)} \\ &= 2 + (j) + (-1) + 2(-j) = 1 - j \end{aligned}$$

227)

Los resultados son los mismos de las ecs. 221, 224, 225, 226 y 227.

g) Desplazamiento circular en frecuencia con $k_0 = 2$

Si:

$$x[n] = \{1, 2, 2, 1\}, \text{ con: } X_{(k)} = \begin{cases} 6; k = 0 \\ -1 - j; k = 1 \\ 0; k = 2 \\ -1 + j; k = 3 \end{cases} \quad 228)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x[n]e^{j\frac{2n\pi k_0}{N}} &= x[n]e^{j\frac{4n\pi}{4}} = x[n]e^{jn\pi} \\ x[n] &= \{1, 2, 2, 1\}e^{jn\pi}; \forall n = 0, 1, 2, 3 \\ &= \{e^0, 2e^{j\pi}, 2e^{j2\pi}, e^{j3\pi}\} = \{1, -2, 2, -1\} \end{aligned} \quad 229$$



Aplicando la propiedad de desplazamiento en frecuencia:

$$x[n]e^{j\frac{2n\pi k_0}{N}} \xleftrightarrow{TFD} X_{(k-k_0)_N} \quad 230)$$

Se tiene:

$$X_{(k-2)} = \begin{cases} X_{(0-2)} = X_{(-2)} = 0 \\ X_{(1-2)} = X_{(-1)} = -1 + j \\ X_{(2-2)} = X_{(0)} = 6 \\ X_{(3-2)} = X_{(1)} = -1 - j \end{cases} \quad 231)$$

Partiendo directamente de la secuencia resultante de haber aplicado el desplazamiento en frecuencia circular a $x[n]$ para verificar los resultados anteriores, se tiene:

$$z[n] = x[n]e^{jn\pi} = \{1, -2, 2, -1\} \quad 232)$$

$$\begin{aligned} Z_{(k)} &= \sum_{n=0}^3 z[n] e^{-j\frac{2n\pi k}{N}}; \forall k = 0, 1, 2, 3. \\ &= 1 - 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{3\pi k}{2}}; \forall k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad 233)$$

Cuando $k=0$:

$$Z_{(0)} = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \quad 234)$$

Cuando $k=1$:

$$Z_{(1)} = 1 - 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} - e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 - 2(-j) + 2(-1) - j = -1 + j \quad 235)$$

Cuando $k=2$:

$$Z_{(2)} = 1 - 2e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} - e^{-j3\pi} = 1 - 2(-1) + 2(1) - (-1) = 6 \quad 236)$$

Cuando $k=3$:

$$Z_{(3)} = 1 - 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} - e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 1 - 2(j) + 2(-1) - (-j) = -1 - j \quad 237)$$



Los resultados son los mismos (ver las ecs. 231 y 234-237).

h) Inversión temporal.

Si:

$$x[n] = \{1, 2, 2, 1\}; N = 4; X_{(k)} = \begin{cases} 6; k = 0 \\ -1 - j; k = 1 \\ 0; k = 2 \\ -1 + j; k = 3 \end{cases} \quad 238)$$

Entonces:

$$x[-n] = \{1, 1, 2, 2\}; \quad 239)$$

Por propiedad:

$$x[-n] \xleftrightarrow{TFD} X_{(-k)_N} \forall 0 \leq k \leq N - 1 \quad 240)$$

Y por lo tanto:

$$X_{(-k)_N} = \begin{cases} 6; k = 0 \\ -1 + j; k = 1 \\ 0; k = 2 \\ -1 - j; k = 3 \end{cases} \quad 241)$$

Si:

$$X_{(k)} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \forall k = 0, 1, 2, 3. \quad 242)$$

Entonces:

$$X_{(-k)} = 1 + 2e^{j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{j\pi k} + e^{j\frac{3\pi k}{2}} \forall k = 0, 1, 2, 3. \quad 243)$$

Cuando k=0:

$$X_{(0)} = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 \quad 244)$$

Cuando k=1:

$$X_{(1)} = 1 + 2e^{j\frac{\pi}{2}} + 2e^{j\pi} + e^{j\frac{3\pi}{2}} \quad 245)$$

$$X_{(1)} = 1 + 2(j) + 2(-1) + (-j) = -1 + j$$



Cuando $k=2$:

$$X_{(2)} = 1 + 2e^{j\pi} + 2e^{j2\pi} + e^{j3\pi}$$

$$X_{(2)} = 1 + 2(-1) + 2(1) + (-1) = 0 \quad 246)$$

Cuando $k=3$:

$$X_{(3)} = 1 + 2e^{j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{j3\pi} + e^{j\frac{9\pi}{2}}$$

$$X_{(3)} = 1 + 2(-j) + 2(-1) + (j) = -1 - j \quad 247)$$

Comprobando este resultado a partir de la secuencia

$$z[n] = \{1, 1, 2, 2\} \quad 248)$$

se tiene:

$$Z_{(k)} = \sum_{n=0}^3 z[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)nk} \quad \forall k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} &= z[0] + z[2]e^{-j\frac{\pi k}{2}} + z[3]e^{-j\pi k} + z[4]e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \\ &= 1 + e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \end{aligned} \quad 249)$$

Cuando $k=0$:

$$Z_{(0)} = [1 + 1 + 2 + 2] = 6 \quad 250)$$

Cuando $k=1$:

$$Z_{(1)} = \left[1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right] = 1 - j - 2 + 2j = -1 + j \quad 251)$$

Cuando $k=2$:

$$Z_{(2)} = [1 + e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + 2e^{-j3\pi}] = 1 - 1 + 2 - 2 = 0 \quad 252)$$

Cuando $k=3$:

$$Z_{(3)} = \left[1 + e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} + 2e^{-j\frac{9\pi}{2}} \right] = 1 + j - 2 - 2j = -1 - j \quad 253)$$



Los resultados son los mismos de las ecuaciones anteriores (ver ecs. 244-247, 250-253).

REQUISITOS DE ENTREGA:

- Anexa el código del script realizado.

Nota: recuerde no utilizar el comando “fft” de Matlab para el cálculo de los coeficientes $X(k)$ de la TFD.

CUESTIONARIO:

1. A parte de la semejanza indicada en la presente práctica, mencione alguna otra similitud entre la serie de Fourier en tiempo discreto y la transformada de Fourier discreta.
- 2.Cuál de las dos representaciones de la TFD (fórmula general y representación matricial) le fue más fácil de calcular matemáticamente.
3. ¿Qué ventajas tiene la representación matricial en cuanto a programar el algoritmo en cuestión?
4. ¿Qué propiedades se aplican en la SFTD que en la TFD no?
5. De las propiedades analizadas en esta práctica, ¿cuáles son las que se emplean en la convolución?
6. ¿Cuántos tipos de nomenclatura existen para representar la TFD?, indique al menos dos tipos.
7. Indique algunas aplicaciones de la TFD que sean relevantes en la ingeniería, específicamente en el área de comunicaciones.
8. ¿En qué casos se puede relacionar la transformada z con la TFD?
9. ¿En que apoya conocer la ubicación de los polos y ceros de $X(z)$?
10. ¿Por qué se dice que la TDF está estrechamente relaciona con la TFF?



4.4 Práctica 7: Transformada rápida de Fourier.

OBJETIVO GENERAL:

El alumno verificará la utilidad del algoritmo de la FFT por decimación en el tiempo contrastando el número de operaciones realizadas en el cálculo directo y el cálculo vía FFT.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) El alumno implementará el algoritmo de la transformada rápida de Fourier con base 2 en MATLAB
- ii) El alumno comparará el número de operaciones involucradas en el cálculo de la TFD usando el método directo y el algoritmo de la transformada rápida de Fourier

INTRODUCCIÓN:

Tomando en cuenta la práctica 6 sobre la transformada discreta de Fourier (DFT por sus siglas en inglés: “Discrete Fourier Transform”), es posible notar que para calcular $X_{(k)}$ a partir de $x[n]$ se requiere de N multiplicaciones, es decir que para calcular $X_{(k)}$; $0 \leq k \leq N - 1$ se requiere de N^2 multiplicaciones. De manera similar se desprende que para calcular $x[n]$ a partir de $X_{(k)}$, también requiere N^2 multiplicaciones. Dichas multiplicaciones por lo regular son complejas; se debe tomar en cuenta que la multiplicación de dos números complejos involucra cuatro multiplicaciones de números reales.

Debido a que la evaluación directa de $X_{(k)}$ y $x[n]$ requieren de N^2 multiplicaciones esto puede ocasionar demasiados cálculos si N es un número grande. Por lo tanto, la TFD puede calcularse con un algoritmo conocido como “FFT”, el cual requiere únicamente de $\frac{(N \log_2 N)}{2}$ multiplicaciones. Esto es una disminución importante en las N^2 multiplicaciones requeridas en la evaluación directa de $X_{(k)}$ y $x[n]$.

Por ejemplo, si $N=1024$, la evaluación directa requiere de $N^2 = 1'048,576$ multiplicaciones. En contraste, el algoritmo de la FFT utiliza únicamente las multiplicaciones calculadas:

$$\frac{(1024 \log_2 1024)}{2} = 5120 \quad 254)$$

Existen diferentes versiones del algoritmo de la FFT. A continuación se analizará el algoritmo por decimación en el tiempo. El algoritmo de decimación en el tiempo genera un enorme incremento de la eficiencia descomponiendo la TFD en procesos más pequeños; en este proceso se utiliza tanto la simetría como la periodicidad del término:



$$W_N^{nk} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (255)$$

$$W_N^N = e^{-j2\pi} = 1 \quad (256)$$

Se supone entonces que $N > 1$ y por lo tanto $W_N \neq 1$. Expresando la TFD en términos de W_N .

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad \forall 0 \leq k \leq N-1; \quad (257)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad \forall 0 \leq k \leq N-1; \quad (258)$$

Si N es un entero par, de manera que $\frac{N}{2}$ sea un entero.

Sean las siguientes señales:

$$a[n] = x[2n]; n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (259)$$

$$b[n] = x[2n + 1]; n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (260)$$

Con TFD respectivamente:

$$a[n] \xleftrightarrow{TFD} A_{(K)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} a[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \quad \forall 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1; \quad (261)$$

$$b[n] \xleftrightarrow{TFD} B_{(K)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} b[n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} \quad \forall 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1; \quad (262)$$

Entonces:

$$X_{(k)} = A_{(K)} + W_N^k B_{(K)}; k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1; \quad (263)$$

$$X_{\left(\frac{N}{2} + k\right)} = A_{(K)} - W_N^k B_{(K)}; k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1; \quad (264)$$



INFORMACIÓN ADICIONAL

El cálculo de la transformada de Fourier tiene muchas aplicaciones, en particular para el caso de la FFT, Gauss fue el primero en utilizarla para realizar cálculos astronómicos en los que él buscaba obtener la interpolación de las órbitas de algunos asteroides a partir de un conjunto de observaciones equiespaciadas. Como es natural, sin la aparición de la computadora, los cálculos involucrados eran largos y tediosos, lo que hacía necesario un método que ahorrara cálculos y disminuyera entonces la probabilidad de error, Gauss desarrolló un algoritmo que fue publicado en latín pero que pasó desapercibido hasta que sus obras fueron recopiladas. [11]

Tiempo después, durante la guerra fría, el uso de la transformada rápida de Fourier fue demandado por tecnología militar estadounidense que requería de asegurar que la URSS no siguiera realizando ejercicios nucleares y para ello se servían los científicos del comité científico asesor de John F. Kennedy de la información recolectada de sismógrafos marinos, sin embargo, dada la cantidad de sismógrafos marinos y el gran volumen de datos obtenido, era necesario un algoritmo que acelerara el cálculo de la TDF. Otra aplicación bélica que utilizaba el cálculo de la TFD era la detección acústica de submarinos acústicos a gran distancia. [11]

John W. Turkey, miembro del comité científico asesor, concibió la idea de un algoritmo que permitiría calcular la transformada de Fourier de manera más rápida, Richard Garwin era otro de los miembros del comité en una reunión con el presidente Kennedy, cuando Turkey le mostró su idea, este hizo que James W. Cooley programara el algoritmo en las instalaciones en Nueva York de IBM. Cooley con la esperanza de terminar el trabajo encargado y continuar con otros, se dispuso a terminarlo pronto, sin embargo eran muchos los pedidos de copias del programa y de instrucciones para ejecutarlo, existía una posibilidad de patentar el algoritmo, sin embargo se extendió al dominio público y en 1965 apareció en Mathematics of computation, el algoritmo creado por Cooley & Turkey. Luego de la publicación, otros investigadores reportaron algoritmos similares que ya habían estado usando, esto dio lugar a la gran diversidad de algoritmos de la FFT. [11]

INSTRUCCIONES:

Sean las siguientes señales finitas de longitud finita y par:

$$1) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4 \right\} \quad 265)$$

$$2) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 0 \right\} \quad 266)$$

$$3) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 1 \right\} \quad 267)$$

$$4) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{2}, 1, 1, 2 \right\} \quad 268)$$

$$5) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 1 \right\} \quad 269)$$

$$6) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 5, 6 \right\} \quad 270)$$



$$7) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{6}, 5, 4, 3, 2, 1 \right\} \quad 271)$$

$$8) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 2, 0, 0 \right\} \quad 272)$$

$$9) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 6, 5, 4 \right\} \quad 273)$$

$$10) \ x[n] = \left\{ \underset{\uparrow}{4}, 5, 6, 3, 2, 1 \right\} \quad 274)$$

Calcular la TFD ($X(k)$) de la función asignada:

- Aplicando el algoritmo de decimación en el tiempo base 2.
- Empleando un script desarrollado por Ud. que aplique el algoritmo de la FFT para la decimación en el tiempo base 2, con el que Ud. pueda verificar alguna otra señal de longitud par.

OBSERVACIONES:

- Apoyarse en el cuadro 12.
- Evitar el uso del comando fft.
- Desplegar resultados en la ventana de comandos e incluirlos.

LISTA DE COMANDOS	
syms	
zeros([m,n]);	
subs(variable_algebráica, término_por_sustituir, término_que_sustituye);	
size();	

Tabla 20: lista de comandos 7.

**DESARROLLO:**

- i. Aplicando el algoritmo de decimación en el tiempo base 2.

Para aplicar la decimación en el tiempo, se tiene que descomponer la señal de longitud par en sus componentes pares e impares, es decir $G_{(k)}$ y $H_{(k)}$ respectivamente. Por lo que se tienen las siguientes expresiones:

$$G_{(k)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] W_N^{(2m)k} \quad \forall k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (275)$$

Reescribiendo la ecuación:

$$G_{(k)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m] W_{\frac{N}{2}}^{mk} \quad (276)$$

Desarrollando para $H_{(k)}$:

$$H_{(k)} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] W_N^{(2m+1)k} \quad \forall k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (277)$$

Reescribiendo la ecuación:

$$H_{(k)} = W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m+1] W_{\frac{N}{2}}^{mk} \quad (278)$$

Una vez obtenidas las expresiones anteriores, sólo queda aplicar el algoritmo para la secuencia:

$$x[n] = \{1, 2, 3, 4\} \quad (279)$$

Considerando $N=4$. Desarrollando para $G_{(k)}$ y $H_{(k)}$:

$$\begin{aligned} G_{(k)} &= \sum_{m=0}^1 x[2m] W_2^{mk} = \left[(1) e^{\frac{-j2\pi(0)k}{2}} + (3) e^{\frac{-j2\pi(1)k}{2}} \right] \\ &= [1 + 3 e^{-j\pi k}] \end{aligned} \quad (280)$$



$$\begin{aligned}
 H_{(k)} &= W_1^k \sum_{m=0}^1 x[2m+1] W_2^{mk} = e^{-\frac{2j\pi k}{4}} \left[(2)e^{\frac{-j2\pi(0)k}{2}} + (4)e^{\frac{-j2\pi(1)k}{2}} \right] \\
 &= [2 + 4 e^{-j\pi k}]
 \end{aligned}
 \tag{281}$$

Ahora, para obtener los resultados, es necesario considerar que para obtener el resultado completo con los N puntos, se genera el resultado completo a partir de que::

$$X_{(k)} = G_{(k)} + H_{(k)} \quad \forall k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \tag{282}$$

$$X_{\left(k+\frac{N}{2}\right)} = G_{(k)} - H_{(k)} \tag{283}$$

Para $X_{(k)}$

k=0:

$$X_{(0)} = 4 + 6 = 10 \tag{284}$$

k=1:

$$X_{(1)} = -2 + (-i)(-2) = -2 + 2i \tag{285}$$

Para $X_{\left(k+\frac{N}{2}\right)}$:

k=0:

$$X_{(2)} = 4 - 6 = -2 \tag{286}$$

k=1:

$$X_{(3)} = -2 - (-i)(-2) = -2 - 2i \tag{287}$$



- iii. Empleando un script desarrollado por usted que aplique el algoritmo de la FFT para la decimación en el tiempo base 2, con el que usted pueda verificar alguna otra señal de longitud par.

```
1
3 ----- + 1
exp(pi k i)

1      / 1      \
----- | 4 ----- + 2 |
/ pi k i \ \ exp(pi k i) /
exp| ----- |
\ 2 /

Y =
1 2 3 4

us =
1

mi_N =
4

res =
0 0 0 0

res =

10.0000      -2.0000 + 2.0000i -2.0000      -2.0000 - 2.0000i
```

Figura 70: salida del script para la FFT.

REQUISITOS DE ENTREGA:

- Anexa el código del script realizado.

Nota: recuerde no utilizar el comando fft para el cálculo de los coeficientes $X(k)$ de la TFD.



CUESTIONARIO:

1. Explique cómo es que el algoritmo de decimación en el tiempo base 2 simplifica los cálculos necesarios para obtener la DFT
2. Ud. ya conoce el algoritmo para la decimación base 2, explique cuál serían los pasos para que la base fuera mayor, tome en cuenta que esto es válido para 2^n donde $n = 1, 2, 3 \dots$ etc.
3. ¿Con que otro nombre es conocida la decimación en el tiempo?
4. Mencione otros algoritmos a parte de la decimación en el tiempo para calcular la FFT
5. La intención de esta práctica fue únicamente verificar el algoritmo de la FFT, sin embargo: ¿cuál es la manera correcta, si es que no fue programado así el script, de optimizar el código y reducir el tiempo de ejecución?
6. Genere el diagrama de mariposa para el ejemplo asignado.
7. ¿Qué aplicaciones tiene la transformada rápida de Fourier?
8. ¿Qué motivo el uso de la transformada rápida de Fourier?
9. ¿Es un invento del SXX la transformada rápida de Fourier?
10. Explique cómo es que ahorra trabajo la transformada rápida de Fourier.



4.5 Práctica 8: Convolución lineal y circular.

OBJETIVO GENERAL:

El alumno contrastará las herramientas de convolución circular para secuencias finitas y convolución lineal para secuencias finitas e infinitas.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) Se aplicarán los diferentes tipos de convolución a secuencias finitas o infinitas según sea el caso.
- ii) Se generarán animaciones con respecto al proceso de convolución lineal, tanto finito como infinito mediante el uso del paquete MATLAB para visualizar de manera gráfica dicho proceso.

INTRODUCCIÓN:

La convolución es una operación matemática que involucra dos funciones, esta operación resulta muy útil en distintas aplicaciones; en primer lugar, la convolución permite resolver transformadas inversas de productos arbitrarios, también llega a ser posible resolver bastantes ecuaciones diferenciales.

En el tiempo discreto, la convolución de dos señales implica la sumatoria del producto de las mismas, donde una de las dos señales ha sido desplazada e invertida. A continuación se muestran las características tanto de la convolución lineal como de la circular:

a) Convolución lineal:

Esta operación mapea una entrada dada para generar una salida como se ilustra en la figura 71.

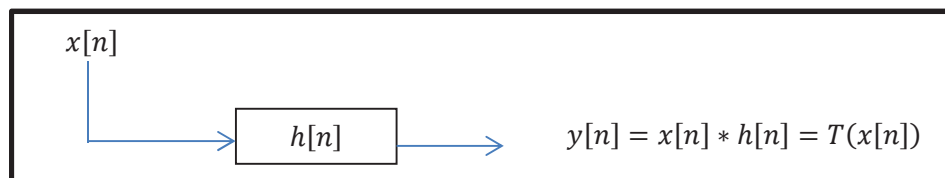


Figura 71: convolución lineal



La suma de Convolución es:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]; -\infty < n < \infty; \quad 288)$$

Propiedades de convolución:

- Conmutativa:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad 289)$$

- Asociativa:

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \quad 290)$$

- Distributiva:

$$x[n] * (h_1[n] \pm h_2[n]) = x[n] * h_1[n] \pm x[n] * h_2[n] \quad 291)$$

b) Convolución circular:

Para realizar una operación de convolución que resulte en una secuencia $y_c[n]$ de longitud N , se necesita definir un reflejo circular y después aplicar un desplazamiento circular. La operación resultante se llama convolución circular.

Desplazamiento circular de una secuencia:

Considerando secuencias de longitud N y definidas para $0 \leq n \leq N-1$, estas secuencias tienen valores de muestras igual a cero para $n > 0$ y $n \geq N$.

Si $x[n]$ es tal secuencia, entonces para un entero arbitrario n_0 , la secuencia desplazada $x[n - n_0]$ no está definida en el rango $0 \leq n \leq N-1$. Por lo tanto se requiere definir otro tipo de desplazamiento que mantenga a la secuencia desplazada en el rango $0 \leq n \leq N-1$. Esto se logra definiendo un nuevo tipo de desplazamiento llamado desplazamiento circular:

$$x_c[n] = x[n - n_0]_N \quad 292)$$

Si $n_0 > 0$ se tiene un desplazamiento circular a la derecha.

La ecuación anterior se reescribe como:

$$x_c[n] = \begin{cases} x[n - n_0]; & \forall n_0 \leq n \leq N-1 \\ x[N - n_0 + n]; & \forall 0 \leq n \leq n_0 \end{cases} \quad 293)$$



La convolución circular está definida de la siguiente manera:

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[n-m]_N = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad 294)$$

En términos de un arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} y_c[0] \\ y_c[1] \\ y_c[2] \\ \vdots \\ y_c[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] & \cdots & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & h[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \cdots & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad 295)$$

A esta matriz se le conoce como matriz circulante.

- La convolución circular se aplica a secuencias de longitud finita con periodos iguales.
- La convolución lineal se aplica a secuencias finitas o infinitas con longitudes que pueden ser diferentes.

INFORMACIÓN ADICIONAL:

La convolución entre dos señales es un concepto de la física importante en muchas ramas del conocimiento, un aspecto importante de la convolución es su aplicación en los dispositivos ópticos, el observador (sin un proceso adecuado) no capta la imagen original, sino la imagen distorsionada por las características del instrumento, dado que este no es perfecto; esto se puede ejemplificar mediante un telescopio o un microscopio fluorescente, la señal que es captada por el observador (O) corresponde a la convolución de la función real captada por el instrumento (T) y la función de distorsión propia del instrumento (I), expresado de manera matemática se tiene:

$$O[n] = T[n] * I[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[k]I[n-k]; \quad 296)$$

INSTRUCCIONES:

Convolución lineal:

- Calcular la convolución lineal $x[n] * h[n]$ para las señales asignadas **finitas**:

$$x[n] = \{3, 1, 2, -1\} \& h[n] = \{1, 2, 1\} \quad 297$$



- ii. Calcule la convolución lineal de secuencias **infinitas** para las señales asignadas:

Sean:

$$x[n] = U[n] - U[n - N] \text{ \& } h[n] = a^{-n}U[n] \quad 298)$$

Calcular

$$x[n] * h[n] \quad 299)$$

- iii. Grafica tu resultado.
- iv. Desarrolle un script que genere una imagen animada tipo GIF en la que se muestre la convolución de:
- El proceso de convolución lineal para secuencias finitas
 - El proceso de convolución lineal infinita.
- v. Compara los resultados obtenidos en el inciso iii y iv.

Convolución circular:

- vi. Calcule la convolución circular finita de las siguientes secuencias, de las siguientes maneras:
- Tabulando la siguiente ecuación:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[n-m]_N \quad 300)$$

- Utilizando la matriz circular correspondiente.

$$x[n] = \{1, 2, 0, 1\} \text{ \& } h[n] = \{2, 2, 1, 1\} \quad 301)$$

OBSERVACIONES:

- Apoyarse en la tabla 21.
- Desplegar resultados en imágenes animadas tipo GIF.
- Tomar en cuenta las siguientes recomendaciones para elaborar la animación:

Para crear la animación de convolución, el concepto como tal debe haber quedado claro, en todo caso, se debe de tomar en cuenta que una señal queda fija mientras que la otra es invertida y desplazada, para ello se recomienda fijar los límites de la función desplegada



en pantalla con el objeto de limitar las operaciones a tres vectores, el vector 'n' ya delimitado, el vector 'x' y el vector 'h', tomando en cuenta que x será la señal fija, es recomendable generar funciones que a partir de un índice devuelvan un vector 'h' de dimensiones idénticas a 'n' y que contenga a la función 'h' desplazada según el índice, para que de esta forma, mediante un ciclo "for" por ejemplo, se mande llamar a la función creada las veces necesarias con el fin de generar el cuadro ("frame") y realizar las operaciones necesarias para el cálculo de la convolución.

LISTA DE COMANDOS

Recordar los aspectos ya mencionados y utilizados en la práctica 1 para dar formato a las gráficas

```
legend();
a.*b;
F = getframe(gcf); %se recupera la imagen
[RGB,badmap] = frame2im(F); %convierte la imagen en tipo 'true-color'
[IND,map] = rgb2ind(RGB, 127); %se indexa el color.
imwrite(IND,map,'Conv1.gif','gif'); %el fichero es creado y guardado
imwrite(IND,map,'Conv1.gif','gif','WriteMode','append','DelayTime',0.7);
%se anexa otra imagen al fichero con un retardo de 0.7s
nota: el fichero solo debe ser creado una vez.
```

Tabla 21: Lista de comandos 8

i) **Calcular la convolución lineal $x[n] * h[n]$ para las señales asignadas finitas:**

$$x[n] = \{3, 1, 2, -1\} \& h[n] = \{1, 2, 1\} \quad 302)$$

Solución:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] * h[n-k] \quad 303)$$

- Cuando

$$n > 0; n[k]h[n-k] = 0 \quad 304)$$

- Cuando n=0:

$$\begin{aligned} y[0] &= \sum_{k=0}^0 x[k] * h[0-k] \\ &= x[0]h[0] = 3(1) = 3 \end{aligned} \quad 305)$$



- Cuando $n=1$:

$$\begin{aligned}y[1] &= \sum_{k=0}^1 x[k] * h[1-k] \\&= x[0]h[1] + x[1]h[0] = 3(2) + 1(1) = 7\end{aligned}\quad 306)$$

- Cuando $n=2$:

$$\begin{aligned}y[2] &= \sum_{k=0}^2 x[k] * h[2-k] \\&= x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] \\&= 3(1) + 1(2) + 2(1) = 7\end{aligned}\quad 307)$$

- Cuando $n=3$:

$$\begin{aligned}y[3] &= \sum_{k=0}^3 x[k] * h[3-k] \\&= x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0] \\&= 3(0) + 1(1) + 2(2) - 1(1)\end{aligned}\quad 308)$$

- Cuando $n=4$:

$$\begin{aligned}y[4] &= \sum_{k=0}^4 x[k] * h[4-k] \\&= x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] + x[4]h[0] \\&= 3(0) + 1(0) + 2(1) - 1(2) + 0(1) = 2 - 2 = 0\end{aligned}\quad 309)$$

- Cuando $n=5$:

$$\begin{aligned}y[5] &= \sum_{k=0}^5 x[k] * h[5-k] \\&= x[0]h[5] + x[1]h[4] + x[2]h[3] + x[3]h[2] + x[4]h[1] + x[5]h[0] \\&= 3(0) + 1(0) + 2(0) + 1(-1) + 2(0) + 1(0) = -1\end{aligned}\quad 310)$$



- Cuando $n=6$:

$$\begin{aligned}
 y[0] &= \sum_{k=0}^6 x[k] * h[6-k] \\
 &= x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3] + x[4]h[2] + x[5]h[1] \\
 &\quad + x[6]h[0] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{311}$$

En resumen:

$$x[n] * h[n] = \begin{cases} 0; n < 0 \\ 3; n = 0 \\ 7; n = 1 \\ 7; n = 2 \\ 4; n = 3 \\ 0; n = 4 \\ -1; n = 5 \\ 0; n > 5 \end{cases} \tag{312}$$

ii) **Calcule la convolución lineal de secuencias infinitas para las señales asignadas:**

Sean:

$$x[n] = U[n] - U[n - N] \text{ \& } h[n] = a^{-n}U[n] \tag{313}$$

Calcular

$$x[n] * h[n] \tag{314}$$

Solución:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] * h[n-k]; \forall -\infty < n < \infty \tag{315}$$

$$x[k] = u[k] - u[k - N] = \begin{cases} 1; 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0; \text{de otra forma} \end{cases} \tag{316}$$



$$h[n-k] = a^{-(n-k)}U[n-k] = \begin{cases} a^{-(n-k)}; & k \leq n \\ 0; & k > n \end{cases} \quad 317)$$

Si $n \leq -1$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = 0; \quad 318)$$

$x[n]$ y $h[n]$ son disjuntas en el tiempo.

Nota: $h[n-k]$ es una secuencia que depende de la variable k y que ha sido girada 180° por el efecto del signo negativo $(-k)$. “ n ” únicamente desplaza la secuencia $h[-k]$ puesto que “ n ” es una constante. Si n es positivo el corrimiento es a la derecha, de lo contrario es a la izquierda.

Si $0 \leq n \leq N-1$:

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n] &= \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^n (1)a^{-n+k} = \sum_{k=0}^n a^{-n}a^k \\ &= a^{-n} \sum_{k=0}^n a^k = a^{-n} \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right); \end{aligned} \quad 319)$$

Si $n \geq N$

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} (1)a^{-n+k} = \sum_{k=0}^{N-1} a^{-n}a^k \\ &= a^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} a^k = a^{-n} \left(\frac{1-a^N}{1-a} \right); a \neq 1 \end{aligned} \quad 320)$$

En resumen:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \begin{cases} 0; & n \leq -1 \\ a^{-n} \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right); & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{-n} \left(\frac{1-a^N}{1-a} \right); & n \geq N \end{cases} \quad 321)$$



iii) **Convolución circular:**

Calcule la convolución circular finita de las siguientes secuencias, de las siguientes maneras:

c) Tabulando la siguiente ecuación:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[n-m]_N \quad 322)$$

n	0	1	2	3
h[n]	2	2	1	1
h[n-1]	1	2	2	1
h[n-2]	1	1	2	2
h[n-3]	2	1	1	2
x[0]h[n]	1(2)	1(2)	1(1)	1(1)
x[1]h[n-1]	2(1)	2(2)	2(2)	2(1)
x[2]h[n-2]	0(1)	0(1)	0(2)	0(2)
x[0]h[n-3]	1(2)	1(1)	1(1)	1(2)
$y_c[n]$	6	7	6	5

Tabla 22: convolución circular

d) Utilizando la matriz circular correspondiente.

$$x[n] = \{1, 2, 0, 1\} \text{ y } h[n] = \{2, 2, 1, 1\} \quad 323)$$

$$\begin{bmatrix} y_c[0] \\ y_c[1] \\ y_c[2] \\ y_c[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[3] & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & h[3] \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} \quad 324)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 325)$$



REQUISITOS DE ENTREGA:

- Anexa el código del script realizado.
- Anexar las imágenes animadas creadas.

CUESTIONARIO:

1. ¿Cuáles son las propiedades en las que se fundamenta la convolución?
2. ¿Qué aplicaciones tiene la convolución en el procesamiento digital de señales?
3. ¿qué proceso se tienen que utilizar al realizar el barrido de la secuencia $h[n]$ para generar la convolución en el paquete MATLAB?
4. ¿Porque la convolución circular se aplica únicamente a secuencias finitas?
5. De cuántas formas es posible efectuar la convolución?
6. ¿Es posible efectuar la convolución para señales continuas?
7. ¿Qué operación matemática se asemeja a la convolución?
8. ¿Es posible realizar la convolución de señales infinitas?
9. Describa algún proceso en el que una función de error altere la medición o los resultados que genere algún dispositivo o instrumento.
10. Describa la convolución circular y la convolución lineal



IPN





CAPÍTULO V

CONTENIDO TEMÁTICO: DISEÑO DE FILTROS



La última parte del curso corresponde al estudio de los filtros digitales, es en este momento en el que los estudiantes aplican las herramientas de matemáticas estudiadas, a continuación se describe la unidad y las prácticas propuestas.

5.1 UNIDAD III. Diseño de Filtros Digitales Para el Procesamiento Digital de Señales

Para finalizar el curso de PDS, se propone realizar el diseño de un filtro digital haciendo uso de los cursos de circuitos, pues con las herramientas que se revisan en dichos cursos es posible generar una función de transferencia para un filtro en específico, mismo que posteriormente será digitalizado. Además del filtro, en esta unidad se propone un tema de investigación y un proyecto de aplicación, este último consta de tres propuestas distintas que muestran mínimamente lo que al estudiante se le puede pedir que desarrolle.

Los temas vistos en esta unidad son los siguientes:

- 3.1 *Formas básicas de realización.*
- 3.2 *Formas directa, transpuesta, cascada y paralelo.*
- 3.3 *Respuesta en frecuencia.*
- 3.4 *Filtros de respuesta al impulso infinito.*
 - 3.4.1 *Método de transformación bilineal.*
 - 3.4.2 *Método de sistema invariable al impulso.*
 - 3.4.3 *Método de sistema invariable al escalón.*
 - 3.4.4 *Diseño de filtros pasa altas, pasa banda y rechazo de banda a partir de la transformación del filtro pasa bajo.*
- 3.5 *Filtros de respuesta impulso finito.*
- 3.6 *Filtros de fase lineal*
 - 3.6.1 *Funciones ventana.*
 - 3.6.2 *Métodos de series de Fourier.*
 - 3.6.3 *Método de muestreo en frecuencia.*
 - 3.6.4 *Método de Remez.*

Los elementos que forman parte de esta última unidad en el manual de prácticas son los siguientes:

- IX Diseño de filtros digitales IIR (por sus siglas en inglés: Infinite Impulse Response).
- IX.A Diseño de filtros digitales FIR (por sus siglas en inglés: Finite Impulse Response).



X Proyecto terminal.

- A. Calculadora científica para obtener los coeficientes de la Transformada Discreta de Fourier.
- B. FFT (Fast Fourier Transform –transformada rápida de Fourier-) aplicado a un generador de señales.
- C. Reconocimiento de audio.

La práctica nueve representa el apoyo que se le da a la última unidad, la práctica 9.1 conforma una presentación por parte del estudiante, mientras que el proyecto terminal (práctica 10) busca plasmar algunos de los conocimientos adquiridos en el curso de PDS dentro de un último trabajo.

Al respecto del diseño de filtros digitales FIR se encontró que se parte de reglas específicas para el diseño digital más que el uso de un diseño analógico. Revisando la bibliografía se encontró que existen diferentes métodos y reglas para el diseño de dichos filtros [4]; la práctica nueve únicamente considera el diseño de Filtros IIR, y en caso de que el maestro desee ahondar en los diseños de filtros FIR, se propone organizar exposiciones por parte de los estudiantes para cubrir dichos temas, en un intento por introducir al estudiante en actividades de documentación e investigación, situación que puede complementar su habilidad de aprender temas por sí solo, bajo la guía y supervisión del profesor.

Los filtros digitales FIR no poseen una documentación tan amplia como los IIR, es por ello que se propone una investigación de los filtros FIR, en cuanto a los proyectos de aplicación, se tiene tres propuestas que en un futuro pueden ampliarse, estas son:

- 1) Calculadora científica para obtener los coeficientes de la Transformada Discreta de Fourier.
- 2) FFT (Fast Fourier Transform –transformada rápida de Fourier-) aplicado a un generador de señales.
- 3) Reconocimiento de audio.

Las tres propuestas son ejemplos en la medida de lo posible sencillos que vinculan el curso de PDS con aplicaciones para audio, el osciloscopio y software, cabe mencionar que pueden existir muchas más propuestas, se muestran en el presente trabajo tres.



5.2 Práctica 9: Diseño de Filtros digitales IIR

OBJETIVO GENERAL:

El alumno diseñará un filtro digital basándose en tres técnicas diferentes y las características de un filtro analógico.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) Obtener el modelo correspondiente al filtro analógico asignado
- ii) Implementar la transformación bilineal.
- iii) Implementar el método del impulso invariante.
- iv) Implementar el método del escalón invariante.

INTRODUCCIÓN:

Existen muchos tipos de filtros, con aplicaciones muy diversas, sin embargo los más comunes son los filtros pasa-altas, pasa-banda, pasa-banda y rechaza-banda. Un filtro digital es una clase de filtro que opera sobre señales discretas, existen dos tipos de filtros digitales importantes clasificados en base a su respuesta al impulso unitario, estos son FIR e IIR.

- FIR se caracterizan (como sus siglas lo indica –voz inglesa: Finite Impulse Response-) por una respuesta finita al impulso, es decir que su respuesta al impulso como entrada tendrá un número finito de términos diferentes a cero; su salida $y[n]$ depende únicamente de la secuencia de entrada $x[n]$ y de sus M valores previos.
- IIR (como sus siglas lo indican Infinite Impulse Response-voz inglesa-) tienen la característica de que si la entrada es una señal impulso, la salida será un número infinito de términos no nulos, es decir que nunca vuelve al reposo. Su salida $y[n]$ depende tanto de la secuencia de entrada $x[n]$ y sus M valores como N valores previos de la propia salida $y[n]$.

Técnicas de diseño de filtros digitales:

Filtros IIR:

- Transformación bilineal
- Invarianza al impulso.
- Invarianza al escalón.

Filtros FIR:

- Series de Fourier.



- Ventaneo.
- Fase lineal
- Muestreo de frecuencias.
- Método de Ronig.

Transformación bilineal:

Considerando que la función de transferencia continua que sirve de base para obtener el filtro digital es estable, se ha de utilizar la siguiente transformación que se conoce como transformación bilineal:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)} \quad 326)$$

Por lo cual:

$$H(z) = H\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)}\right) \quad 327)$$

Lo que significa que la función de transferencia del filtro digital es aproximadamente igual a la función de transferencia del sistema de tiempo continuo con el correspondiente reemplazo de s . La frecuencia de corte del filtro analógico es dada por la siguiente ecuación:

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \quad 328)$$

Mientras que la frecuencia de corte de la función de transferencia discreta está dada por:

$$\omega T = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \quad 329)$$

Impulso invariante:

Hace que la respuesta del sistema en tiempo discreto a un impulso en tiempo discreto sea una versión muestreada de la respuesta del sistema en tiempo continuo a un impulso en tiempo continuo; este diseño es quizá la técnica más directa para aproximar un filtro analógico con uno digital. Si la función de transferencia del filtro analógico en el dominio de Laplace es $H(s)$, entonces la respuesta al impulso es $h(t)$; si se muestrea a $h(t)$, se forma una función en tiempo discreto $h[n]$ y es posible tomar la transformada z de $h[n]$ para que produzca la función de transferencia en el dominio $H(z)$ deseada:

$$L^{-1}\{1 \cdot H(s)\} = \delta(t) * h(t) \quad 330)$$

$$Z\{\delta[n]h[nT]\} = Z\{\delta[n]\}Z\{h[nT]\} \quad 331)$$



Escalón invariante:

La respuesta al escalón del filtro digital se diseña para que iguale la respuesta al escalón del filtro analógico, se tiene una función de transferencia $H(s)$, la transformada de Laplace de la respuesta al escalón es $\frac{H(s)}{s}$; la propia respuesta al escalón es la transformada de Laplace inversa:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} = 1 * h(t) \quad 332)$$

La respuesta de la secuencia unitaria en tiempo discreto equivalente es:

$$h[n] = h(t)|_{t=nT} \quad 333)$$

su transformada z es el producto de la función de transferencia en el dominio z y la transformada z de una secuencia unitaria:

$$\mathfrak{z}\{h[n]\} = \frac{z}{z-1} \cdot H(z) \quad 334)$$

En resumen, es posible determinar la corriente función de transferencia en el dominio z de la siguiente manera a partir de una función $H(s)$:

$$H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \mathfrak{z} \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{h(s)}{s} \right\} \right\} \quad 335)$$

INFORMACIÓN ADICIONAL:

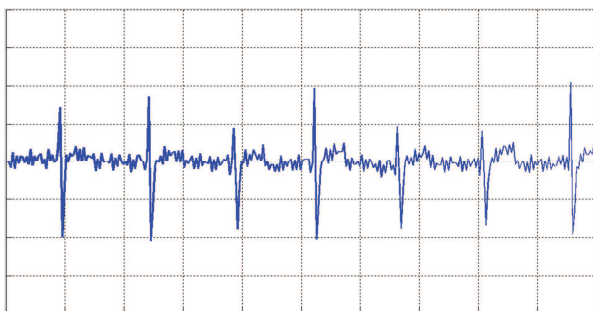


Figura 72: señal en un electrocardiograma

Los filtros digitales tienen una gran cantidad de aplicaciones, por ejemplo en el tratamiento de imágenes, sin embargo una aplicación de suma importancia es el electrocardiograma, este dispositivo permite mejorar la calidad y en algunos casos salvar la vida de los pacientes, una vez que se ha diseñado el filtro correspondiente, entonces se debe decidir la manera de aplicar el filtro digital, puede ser por software e implementarlo por medio de una computadora o bien directamente por medio

de hardware como podría ser un micro-controlador o un FPGA.

**INSTRUCCIONES:**

- Partiendo del circuito del filtro analógico asignado, aplique las leyes de Kirchhoff, para obtener la ecuación integro-diferencial correspondiente y obtenga la función de transferencia de voltaje.
- Mediante el uso del paquete obtenga la respuesta de dicho filtro analógico, es decir la gráfica de Bode de frecuencia contra magnitud, de igual manera para cada uno de los métodos en el diseño del filtro digital.
- Aplique los métodos de transformación bilineal, invarianza al impulso e invarianza al escalón y compare la respuesta del filtro digitalizado en cada caso con la del filtro analógico.
- Analice los resultados comparativos e indique cuál de los tres métodos es el más adecuado en el diseño del filtro digital, justifique su respuesta (se sugiere considerar aplanamiento por ejemplo).

A continuación se ilustran los tipos de filtros a desarrollar con sus distintas variantes:

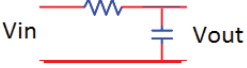
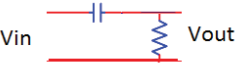
Filtro pasa bajas	
Variantes: • RC • RL	  
Filtro pasa altas	
Variantes: • RC • RL	  

Tabla 23: tipos de filtros



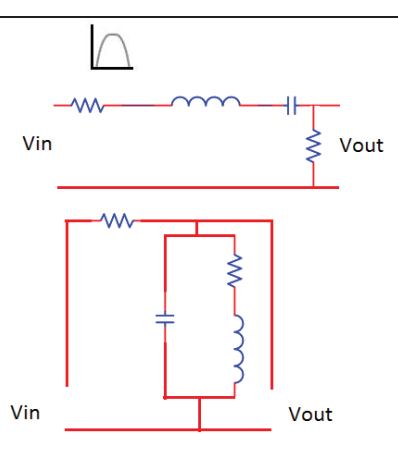
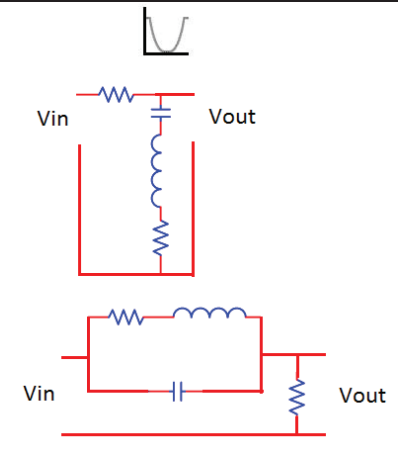
Filtro pasa banda	
Variantes: • Serie • paralelo	
Filtro rechaza banda	
• Serie • paralelo	

Tabla 23: tipos de filtros

OBSERVACIONES:

- los valores de los elementos pasivos se dejan a criterio del estudiante, respetando únicamente el valor de la frecuencia a 160Hz, esta será la frecuencia rechazada en el caso del filtro rechaza banda, y la banda de paso para el filtro pasa-banda; mientras que para los filtros pasa-bajas y pasa-altas será la frecuencia de corte.
- Apoyarse en el toolbox presente a continuación.

LISTA DE COMANDOS

```
tf();  
bodemag();
```

Tabla 24: Lista de comandos 9

**DESARROLLO:****i) Obtener el modelo correspondiente al filtro analógico asignado**

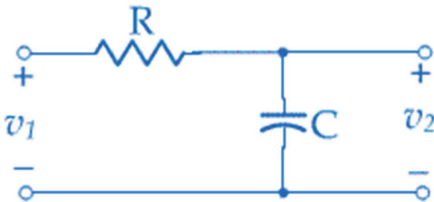
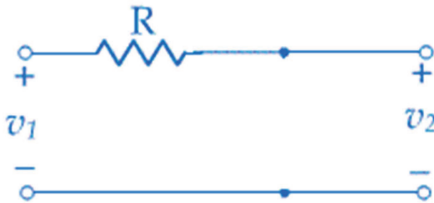
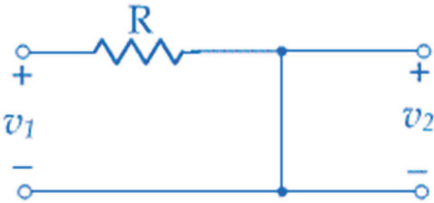
	En este ejemplo se optó por utilizar la red RC en modo de filtro pasa bajas, para entender cómo funciona, es necesario analizar su comportamiento cuando la frecuencia (ω) tiende a 0, o bien cuando tiende a infinito;
	Quando ω tiende a 0: El capacitor se comporta como un circuito abierto y por lo tanto v_2 es máximo, en este caso se tendría una componente de corriente directa.
	Quando ω tiende a ∞ : en este caso el capacitor se comporta como corto circuito y v_2 es mínimo, es decir nulo.

Tabla 25: filtro RC

De esta forma es claro que a frecuencias relativamente bajas, estas pasarán, y de manera contraria, para frecuencias relativamente altas, serán atenuadas; una vez hecho este análisis, es necesario obtener la representación del circuito en el dominio de la frecuencia, para ello se recurre a Laplace, se observa que existen dos impedancias: Z_R y Z_C , para obtener el voltaje v_2 , se aplica divisor de voltaje y se obtiene:

$$v_2 = v_1 \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \quad 336)$$

Es necesario obtener las ecuaciones íntegro-diferenciales que caracterizan a la red propuesta, una vez hecho esto se deberá obtener la representación en el dominio de la frecuencia por medio de Laplace:



$$v1 = iR + \frac{1}{c} \int i(t) dt \quad 337)$$

$$v2 = \frac{1}{c} \int i(t) dt \quad 338)$$

$$L\{v1\} = R + \frac{1}{sc}; L\{v2\} = \frac{1}{sc} \quad 339)$$

La impedancia para la resistencia es simplemente R, mientras que para el capacitor es: $\frac{1}{j\omega c}$, o bien $\frac{1}{sc}$, de manera que, obteniendo la función de transferencia $\frac{L\{v2\}}{L\{v1\}}$, y reescribiendo los términos se obtiene:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sc}}{R + \frac{1}{sc}} = \frac{1}{src + 1} \quad 340)$$

Se observa que la frecuencia de corte para este filtro es 160Hz, utilizando la correspondiente fórmula para obtener la frecuencia de corte, se proponen valores para R y C:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \rightarrow R \approx 1k\Omega; C \approx 1\mu F \quad 341)$$

Sustituyendo valores en la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{s(1k\Omega)(1\mu F) + 1} = \frac{1}{.001s + 1} = \frac{1000}{s + 1000} \quad 342)$$

Se puede ver el diagrama de Bode para el filtro analógico en la fig. 73.

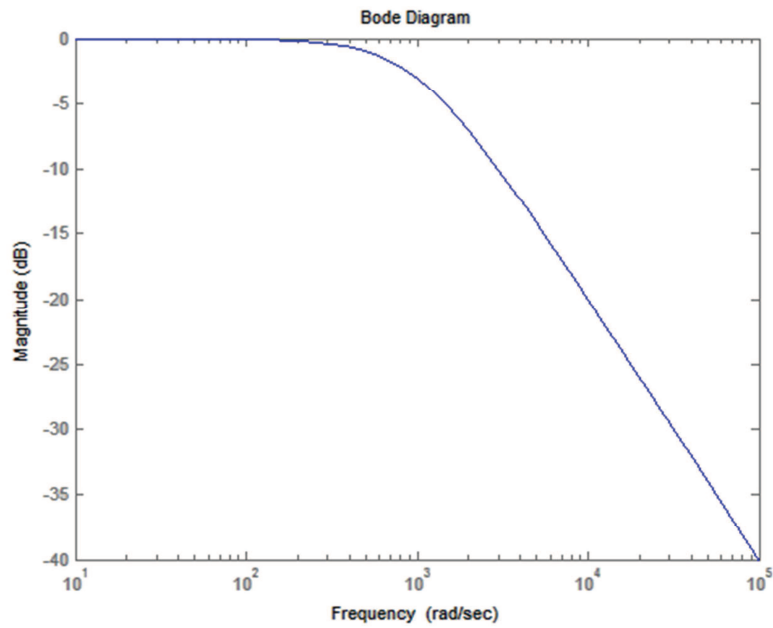


Figura 73: diagrama de Bode 1

ii) **Implementar la transformación bilineal.**

Partiendo de la función de transferencia, se realiza un cambio de variable en dicha función para obtener el filtro digitalizado:

$$H(s) = \frac{1}{.001 s + 1} \quad 343)$$

$$H(Z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad 344)$$

$$H(Z) = \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} \right) RC} \right] = \left[\frac{(z+1)}{(z+1) + \left(\frac{2}{T} (z-1) \right) RC} \right] \quad 345)$$

Sustituyendo valores en la ecuación:



$$H(Z) = \left[\frac{(z+1)}{(z+1) + \left(\frac{2}{0.00625} (z-1) \right) (1000 \cdot .000001)} \right]$$
$$= \left[\frac{z+1}{z+1+0.32z-0.32} \right]$$
$$H(Z) = \left[\frac{z+1}{1.32z+0.68} \right]$$

346)

El código para obtener la gráfica correspondiente en MATLAB es el siguiente:

```
num = [1 1]
den = [1.32 0.68]
Hz = tf(num,den,0.00625);
bodemag(Hz)
```

Figura 74: código diagrama de Bode 2

La gráfica de respuesta en frecuencia para el filtro digitalizado por el método transformación bilineal:

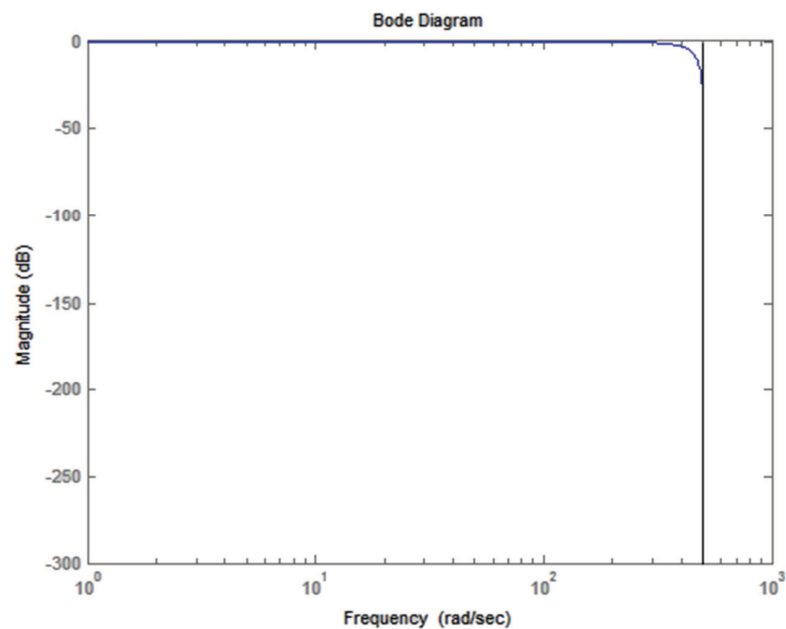


Figura 75: diagrama de Bode 2



iii) Implementar el método del impulso invariante.

Se parte de la función de transferencia que ha sido obtenida del circuito en cuestión, es decir el filtro pasa bajas RC:

$$H(s) = \frac{1}{(RC)s + 1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{(RC)s + 1} \right) \quad 347)$$

Ahora se deberá obtener la transformada inversa de Laplace en el dominio del tiempo continuo para después digitalizar de la forma $t = nT$.

$$\begin{aligned} L^{-1}\{1 \cdot H(s)\} &= L^{-1}\left\{1 \cdot \left(\frac{1}{(RC)s + 1}\right)\right\} \\ &= \delta(t) * h(t) = \delta(t) * \frac{1}{RC} L^{-1}\left\{1 \cdot \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)\right\} \\ &= \delta(t) * h(t) = \delta(t) * \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \xrightarrow{t=nT} \delta[n] * \frac{1}{RC} e^{-\frac{nT}{RC}} \end{aligned} \quad 348)$$

Ahora se deberá aplicar la transformada 'z':

$$\begin{aligned} Z\{\delta[n]h[n]\} &= Z\left\{\delta[nT] * \frac{1}{RC} e^{-\frac{nT}{RC}}\right\} = Z\{\delta[n]\} \frac{1}{RC} Z\left\{e^{-\frac{nT}{RC}}\right\} \\ 1 \cdot H(Z) &= 1 \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{RC}}} \\ H(Z) &= \frac{1}{RC} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{RC}}} \end{aligned} \quad 349)$$

Por último se sustituyen los valores de la resistencia y el capacitor:

$$H(Z) = \frac{1}{(1k\Omega)(1\mu F)} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{(1k\Omega)(1\mu F)}}} = 1000 \cdot \frac{z}{z - e^{-1000T}} \quad 350)$$

En este caso, la frecuencia de corte es aproximadamente 160Hz, por lo tanto $T = 6.25\text{ms}$; El código para obtener la gráfica correspondiente en MATLAB es el siguiente:

```
T = 6.25e-3;
num = [1000 0]
den = [1 -1.93e-3]
Hz = tf(num,den,T);
bodemag(Hz)
```

Figura 76: código diagrama de Bode 3



La gráfica de respuesta en frecuencia para el filtro digitalizado por el método invarianza al impulso:

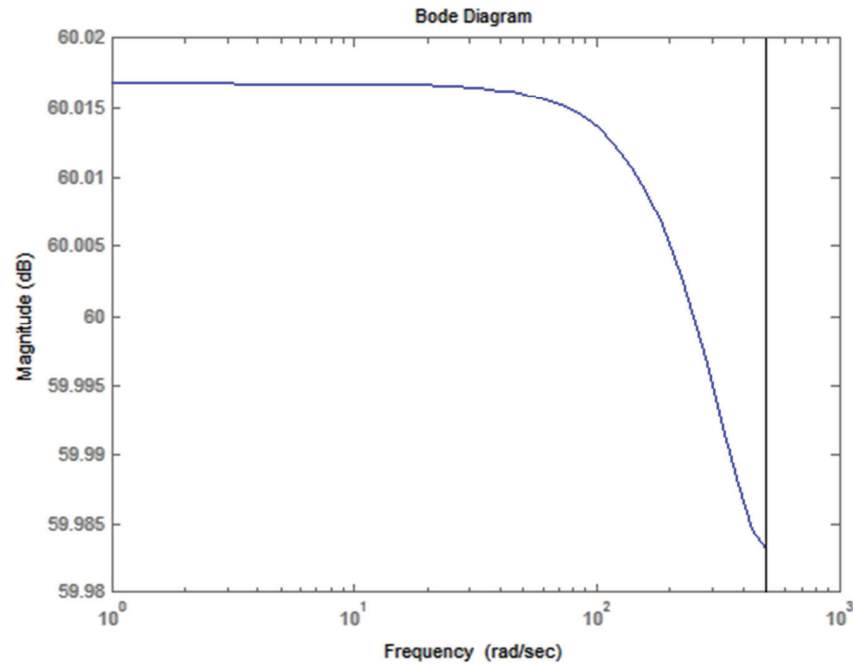


Figura 77: diagrama de Bode 3

iv) Implementar el método del escalón invariante.

Se parte de la función de transferencia que caracteriza al filtro en cuestión, para luego aplicar el método invariante al escalón.

$$H(s) = \frac{1}{(RC)s + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}(RC)s + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (351)$$

Sustituyendo valores:

$$H(s) = \frac{1000}{s + 1000} \quad (352)$$

Aplicando el método de invarianza al escalón:

$$\frac{1}{s}H(s) = \frac{1}{s} \frac{1000}{s + 1000} \quad (353)$$



Aplicando transformada inversa de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * 1000L^{-1}\left\{\frac{1000}{s+1000}\right\} \quad 354)$$

$$u(t) * h(t) = u(t) * 1000 e^{-1000t} \quad 355)$$

Digitalizando $t = nT$, y tomando $T=6.25\text{ms}$:

$$u[n] * h[n] = u[n] * 1000 e^{-6.25n} \quad 356)$$

$$\frac{z}{z-1}H(Z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1000 \cdot z}{z - e^{-6.25}} \quad 357)$$

$$\therefore H(Z) = \frac{1000 \cdot z}{z - e^{-6.25}} = \frac{1000 \cdot z}{z - .00193} \quad 358)$$

El código para obtener la gráfica correspondiente en MATLAB es el siguiente:

```
num = [1000 0];  
den = [1 -0.00193];  
Hz = tf(num,den, 0.00625);  
bodemag(Hz)
```

Figura 78: código diagrama de Bode 4

La gráfica de respuesta en frecuencia para el filtro digitalizado por el método invarianza al escalón se muestra en la figura 76.

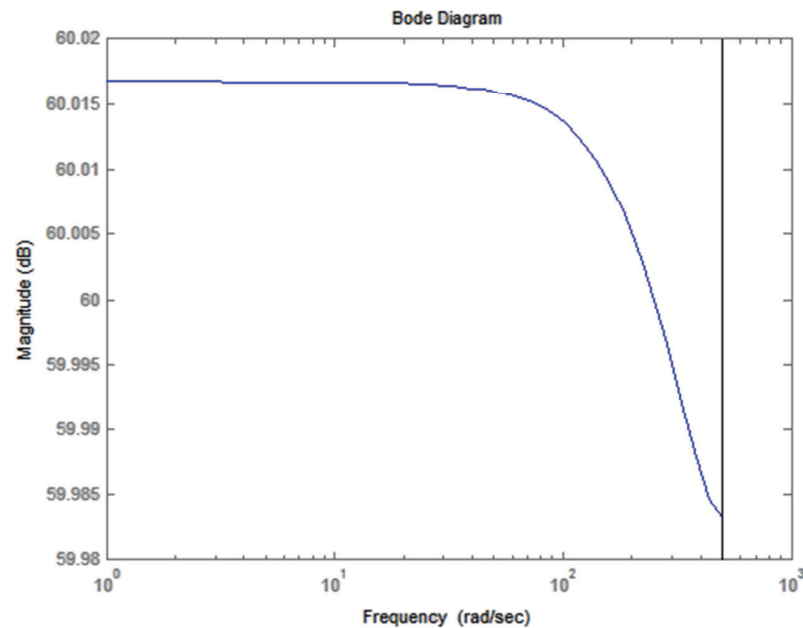


Figura 79: diagrama de Bode 4

REQUISITOS DE ENTREGA:

- Anexa el código de los scripts realizados en cada método, así como del filtro analógico.
- Mostrar las gráficas obtenidas en cada caso.
- Reportar los cálculos matemáticos efectuados en cada método.

CUESTIONARIO:

1. Dado el desarrollo de la práctica, ¿qué se puede decir en cuanto al grado de dificultad existente al diseñar un filtro analógico contra el digital?
2. ¿Qué ventajas o desventajas se tienen al comparar la respuesta del filtro analógico versus filtro digital? Elabora una tabla comparativa que indique los pros y contras.
3. ¿En qué casos es más conveniente implementar el filtro analógico que uno digital?
4. ¿Es posible el análisis de circuitos utilizando los comandos empleados en esta práctica?
5. ¿Es necesario partir de un filtro analógico para crear un filtro digital?



5.3 Práctica 9A: Diseño de filtros FIR

OBJETIVO GENERAL:

El alumno realizará una presentación en la que expondrá alguno de los métodos de diseño de los filtros FIR.

OBJETIVO PARTICULAR:

Con los conocimientos adquiridos hasta este momento en el curso, el alumno podrá:

- i) Promover la capacidad de análisis, síntesis, selección de información, etc. Para investigar las diferentes técnicas.
- ii) Investigar en las diferentes fuentes a su alcance (internet, libros, artículos de investigación, trabajo de campo, etc.) las distintas técnicas para diseñar filtros FIR.
- iii) Comunicar sus ideas de manera clara y precisa el diseño de filtro asignado.
- iv) Defender y explicará dudas de sus compañeros en la exposición del tema.

INTRODUCCIÓN:

A diferencia de los filtros IIR, los FIR no tienen ninguna conexión con el diseño de filtros analógicos; por ello el diseño de este tipo de filtros se basa en una aproximación directa de la respuesta de magnitud especificada, aunado a ello se requiere que la respuesta de fase sea lineal. Una función de transferencia $H(z)$ que caracterice a un filtro FIR y sea causal de longitud $N+1$ es un polinomio en z^{-1} de grado N , es decir:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \quad 359)$$

Su correspondiente respuesta en frecuencia viene siendo dada por:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-j\omega n} \quad 360)$$

Una vez que es elegido el tipo de filtro digital con el que se va a trabajar, es necesario definir el orden de este, para mantener el filtro acorde a las capacidades de la computadora, micro-controlador o dispositivo, es necesario utilizar el orden mínimo que sea mayor que o igual al valor estimado. Para la estimación del orden N se han propuesto varias fórmulas como la de Kaiser por ejemplo, una vez obtenido el resultado, se utiliza el entero siguiente, por ejemplo si el resultado es 92.1 el entero más próximo hacia arriba es 93.



La estructura básica de un filtro FIR es la siguiente:

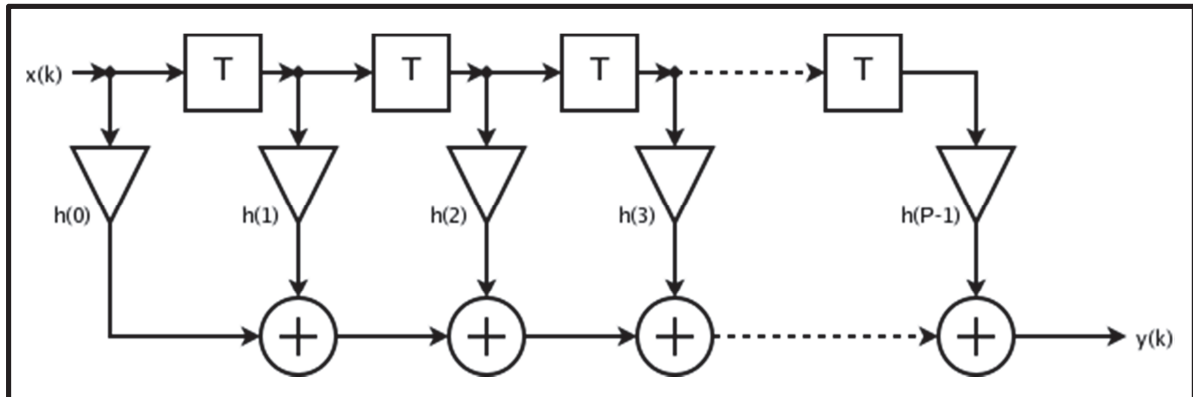


Figura 80: diagrama filtros FIR

Donde los elementos T corresponden a los retardos y los h a los coeficientes.

INFORMACIÓN ADICIONAL:

En este punto del análisis del procesamiento digital de señales, es necesario resaltar las particularidades de cada uno de los filtros, es decir los IIR y los FIR. Algunas veces resulta mejor el implementar alguno de los dos tipos, a continuación se muestra una tabla comparativa:

	Filtros IIR	Filtros FIR
Fase	Difícil de controlar, no existen técnicas comunes disponibles.	Una fase lineal siempre es posible.
Estabilidad	Puede ser inestable.	Siempre es estable.
Orden	Menor orden.	Mayor orden.
Procedencia	Derivado de filtros analógicos.	No proceden de filtros analógicos

Tabla 26: filtros IIR vs filtros FIR

INSTRUCCIONES:

- El profesor asignará alguno de los siguientes métodos de diseño de filtros FIR a cada uno de los equipos ya formados por tres integrantes.
 - Filtros de fase lineal
 - Funciones ventana.
 - Métodos de series de Fourier.
 - Método de muestreo en frecuencia.
 - Método de Remez.

**OBSERVACIONES:**

- i. Cabe mencionar que los métodos de diseño de filtros FIR no se encuentran ampliamente documentados, por lo que el estudiante deberá realizar una investigación profunda en todas las fuentes posibles.

El filtrado digital consiste en la realización interna de un procesamiento de datos de entrada. El valor de la muestra de la entrada actual y algunas muestras anteriores (que previamente hayan sido almacenadas) son multiplicadas, por unos coeficientes definidos. También podría tomar valores de la salida en instantes pasados y multiplicarlos por otros coeficientes. Finalmente todos los resultados de todas estas multiplicaciones son sumados, dando una salida para el instante actual. Esto implica que internamente tanto la salida como la entrada del filtro serán digitales. Un filtro FIR tiene una función de transferencia como la que se muestra en la figura 79.

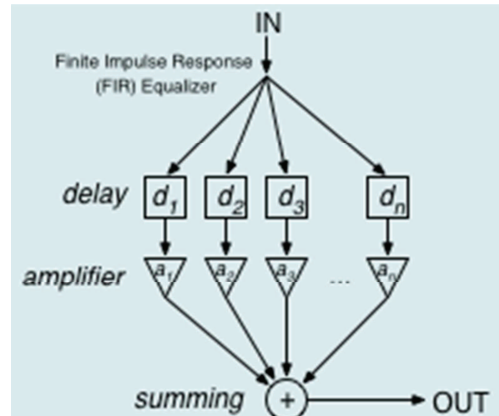


Figura 81: ecualizador por filtro FIR

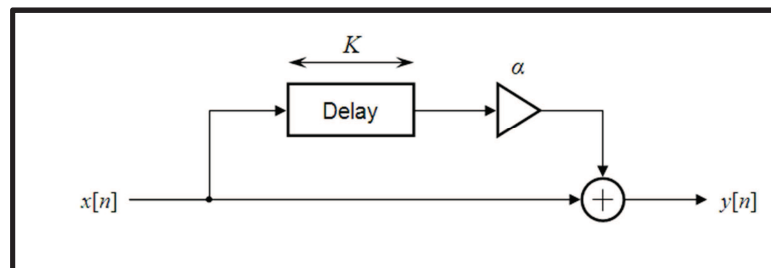


Figura 82: diagrama filtro FIR

Un filtro FIR se basa en entradas anteriores y actuales, su expresión en el dominio n con N muestras viene dada por la siguiente ecuación:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(n-N+1)$$

361)

Las características de los filtros FIR son las siguientes:

- Los filtros FIR tienen la desventaja de necesitar un orden mayor respecto a los filtros IIR para cumplir las mismas características; esto se traduce en un mayor gasto computacional.



- Los filtros FIR tienen la gran ventaja de que pueden diseñarse para ser de fase lineal, lo cual hace que presenten ciertas propiedades en la simetría de los coeficientes.
- Son siempre estables.

Para diseñar cualquier filtro digital se parte de la convolución de dos señales (finitas), para su diseño se obtiene la salida a partir de las entradas actuales y anteriores (ec. 361) donde b_k son los coeficientes del filtro. Ante un estímulo de una función impulso, la respuesta es finita como el nombre de este tipo de filtros lo indica (FIR: Finite Impulse Response –voz inglesa: respuesta finita al impulso-); la salida $y(n)$ puede escribirse como la convolución de la entrada $x(n)$ con la función impulso $h(n)$, ver ec. 362.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k); h(k) \begin{cases} 0; k < 0 \\ h(k); 0 \leq k < N \\ 0; k \geq N \end{cases} \quad 362)$$

Luego, la expresión puede reescribirse como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad 363)$$

Donde puede notarse que los coeficientes del filtro corresponden a la respuesta al impulso. Los filtros FIR tienen la ventaja de poder ser diseñados manteniendo una fase lineal, para ello existen tres bloques de métodos, los cuales son:

- Método de las ventanas
- Muestreo en frecuencia
- Rizado constante

El método de las ventanas se basa en acotar la respuesta del impulso a partir de un filtro ideal; muestreo en frecuencia propone fijar puntos específicos con respuesta en frecuencia constante y a partir de la transformada inversa de Fourier encontrar los coeficientes del filtro; el método de Remez minimiza la función de error que caracteriza al filtro basándose en la teoría de aproximaciones de Tchebyshev y utilizando el algoritmo de intercambio de Remez; el algoritmo de intercambio de Remez fue publicado por Evgeny Yakovlevich Remez en 1934 y es un algoritmo iterativo usado para encontrar aproximaciones simples a funciones, específicamente aproximaciones a funciones en el espacio de Tchebyshev [13].

El método de Remez aplicado a filtros FIR, fue publicado por James McClellan y Thomas Parks en 1972, es un método iterativo para encontrar un filtro tipo Tchebyshev tipo FIR que sea óptimo. Un filtro tipo Tchebyshev puede ser analógico o digital, permiten generar un rizado en algunas de sus bandas (paso o rechazo). [13]

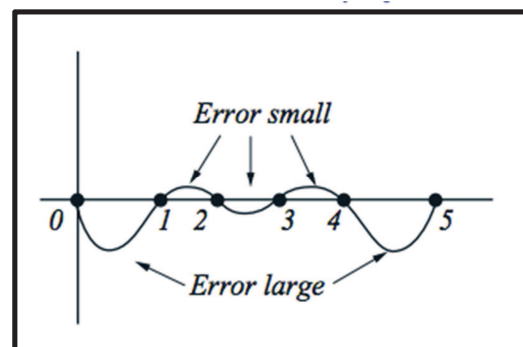


Figura 80: error, método de remez.



El objetivo del método de Remez, conocido como algoritmo Parks-McClellan, es minimizar el error en la banda de paso y de filtrado utilizando la aproximación de Tchebyshev, cabe mencionar que es una variación del método de Remez aplicado específicamente a filtros FIR. Los filtros Tchebyshev permiten el rizado en ellos, en este caso es necesario que el rizado no rebase cierto límite identificado como error en este método, tanto en la banda pasante como en la banda rechazada; en la fig. 80 se ejemplifica el error en el rizado.

Para el diseño de un filtro FIR por método de Remez se escogen cuatro de los siguientes parámetros:

- N el orden del filtro
- ω_p límite superior de la banda pasante
- ω_s límite inferior de la banda atenuada
- δ_1 máximo rizado de la banda pasante
- δ_2 mínima atenuación de la banda atenuada.

Los pasos para diseñar un filtro FIR a través del método de Remez son los siguientes:

1. Escoger una serie de valores para las frecuencias extremas (ω_i)
2. Obtener δ (error) a partir de la ecuación dada
3. Se utiliza la interpolación de Lagrange para obtener un denso conjunto de valores muestreados de la función impulso sobre la banda de paso y la banda de rechazo.
4. Se determinan los extremos más grandes.
5. Si no se satisfacen los parámetros se vuelve al punto 2 hasta cumplirlos.
6. Si se satisfacen los parámetros se obtiene $h[n]$ para obtener los coeficientes del filtro.

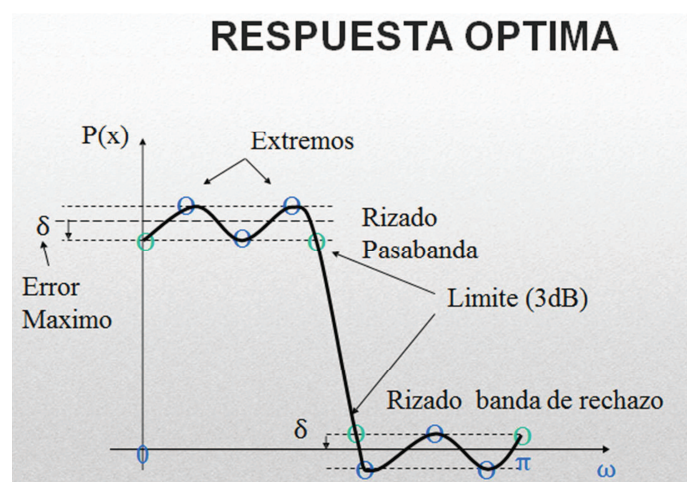


Figura 81: polinomio orden 7, 10 puntos de rizado.



Es posible crear un filtro FIR a partir del método de Remez en MATLAB, para ello se deben especificar los parámetros correspondientes y utilizar el comando `remez`, en la fig. 85 y fig. 86 se muestran los comandos necesarios y la gráfica de respuesta en frecuencia del filtro.

```
%Ejemplo de utilizacion del algoritmo de Remez
Fm=1000;           %Frecuencia de muestreo
deltal=0.1;        %Desviacion en la banda pasante.
delta2=0.01        %Desviacion en la banda no pasante.
F1=200;           %Inicio de la banda de transición
F2=250;
F=[F1 F2];
W=[1 0];          %Valores ideales del filtro
rizado=[deltal delta2];

[n,fo,mo,w] = remezord( F, W, rizado, Fm ); %Estimamos el orden
b = remez(n,fo,mo,w); %Obtenemos los coeficientes del filtro
subplot(211)
resfre_mo(b,1,'l');
title(['Orden=' num2str(n)])
subplot(212)
resfre_mo(b,1,'dB');
```

Figura 85: script para el método de Remez.

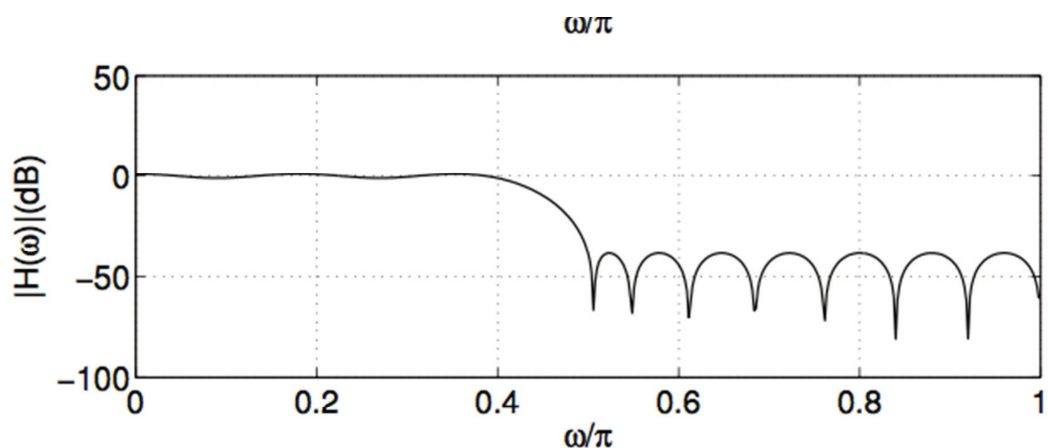


Figura 86: salida para el método de Remez en MATLAB.



5.4 Proyecto de aplicación A: calculadora.

OBJETIVO GENERAL:

El alumno diseñará una calculadora que permita resolver la transformada discreta de Fourier en forma directa en inversa para un nivel básico, en este nivel se sugiere el uso de ventana de comandos. Los requisitos básicos son: usar un emulador para Android o bien app inventor; en el caso del nivel avanzado se da la libertad al alumno de usar ya sea app inventor o eclipse para Android; los objetivos particulares cambian para cada nivel y solo en el nivel básico se permite el uso de ventana de comandos.

Nota: se sugiere al profesor incentivar el nivel avanzando ofreciendo alguna facilidad a los alumnos como podría ser una cantidad determinada extra de décimas en la calificación a criterio del mismo.

Los temas que cubre este proyecto de aplicación son TFD y convolución.

OBJETIVO PARTICULAR:

Nivel básico

- i) Calcular la TFD en forma directa.
- ii) Calcular la TFD en forma inversa.

Nivel avanzado

- i) Calcular la TFD en forma directa.
- ii) Graficar el espectro de magnitud.
- iii) Graficar el espectro de fase.
- iv) Efectuar la convolución de dos señales de manera gráfica.

INFORMACIÓN ADICIONAL

Android es un sistema operativo basado en el kernel de Linux diseñado principalmente para dispositivos móviles con pantalla táctil, como teléfonos inteligentes o tabletas, inicialmente desarrollado por Android, Inc. Google respaldó económicamente y más tarde compró esta empresa en 2005. Android fue presentado en 2007 junto la fundación del Open Handset Alliance: un consorcio de compañías de hardware, software y telecomunicaciones para avanzar en los estándares abiertos de los dispositivos móviles. El primer móvil con el sistema operativo Android fue el HTC Dream y se vendió en octubre de 2008.



INSTRUCCIONES:

Nivel básico

- Elaborar una lista de las opciones presentes en el menú por ventana de comandos
- Permitir al usuario el cálculo de la TFD de manera directa e inversa

Nivel avanzado

- Elaborar un diagrama de los botones que permitan acceder a las diferentes opciones.
- Establecer la longitud máxima de las dos señales ($x[n]$ & $h[n]$) que el usuario ingresará, esto con el fin de facilitar la elaboración de las gráficas de magnitud y fase y de la convolución.
- Permitir al usuario el cálculo de la TFD en forma directa, la obtención de los espectros de magnitud y fase para la señal $x[n]$ y la convolución de dos señales: $x[n]$ & $h[n]$.

Instrucciones comunes a ambos niveles:

- Documentar con fotografías la interface.
- Indicar la compatibilidad con la versión del SO Android.
- Elaborar un diagrama de flujo.
- Elaborar un manual de instalación.

REPORTE:

Para esta referencia, se decidió el uso de eclipse para Android en un nivel avanzado, a continuación se desarrollan los puntos mencionados en las instrucciones:

- Elaborar un diagrama de los botones que permitan acceder a las diferentes opciones.

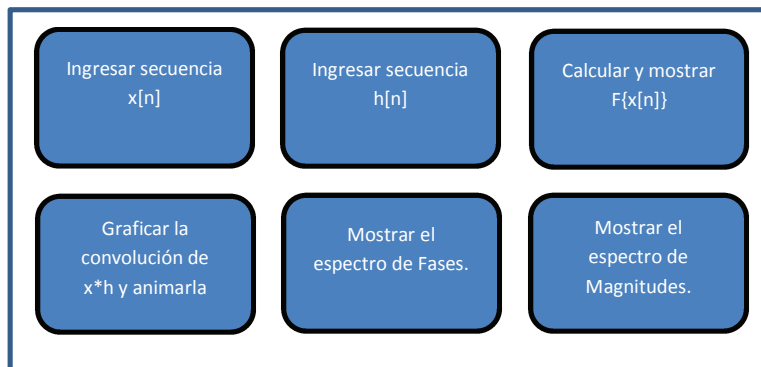


Figura 87: opciones del menú

- Establecer la longitud máxima de las dos señales ($x[n]$ & $h[n]$) que el usuario ingresará, esto con el fin de facilitar la elaboración de las gráficas de magnitud y fase y de la convolución.

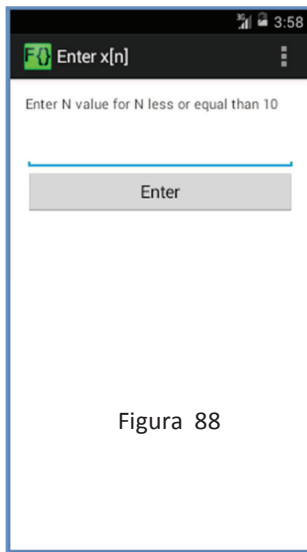


Figura 88

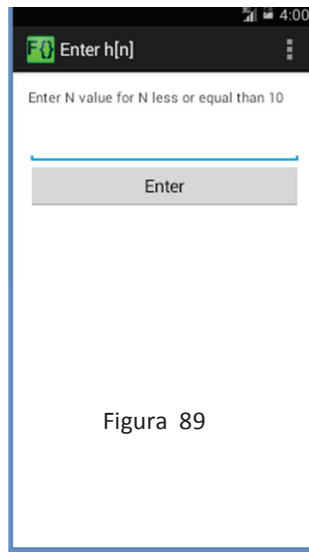


Figura 89

Se estableció la longitud máxima de las secuencias en un valor de 10, cómo se puede apreciar en las imágenes, al ingresar las secuencias $x[n]$ & $h[n]$, se indica al usuario que N debe ser menor o igual a diez.

Figura 88: ingresar secuencia $x[n]$ Figura 89: ingresar secuencia $h[n]$

- iii. Permitir al usuario el cálculo de la TFD en forma directa, la obtención de los espectros de magnitud y fase para la señal $x[n]$ y la convolución de dos señales: $x[n]$ & $h[n]$.
- i. Documentar con fotografías la interface.

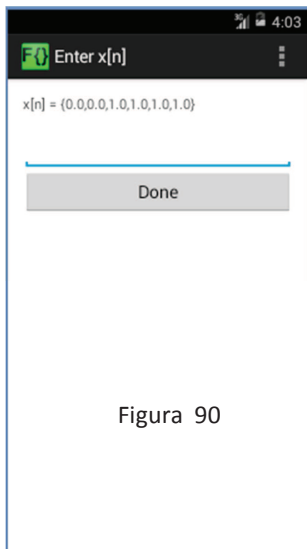


Figura 90

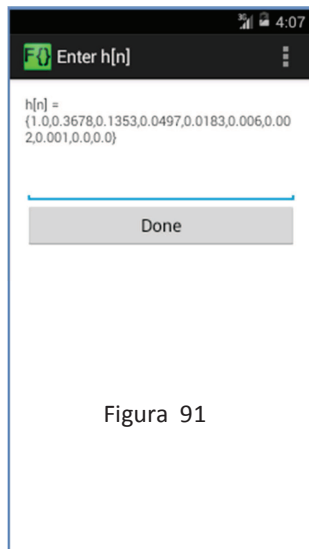
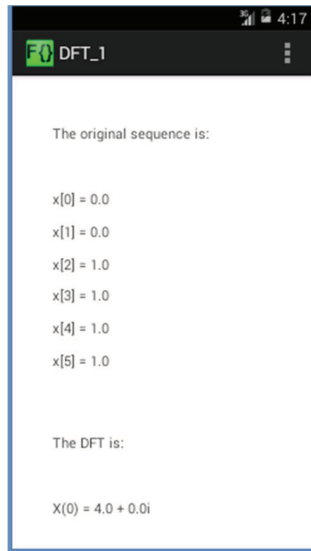


Figura 91

En las imágenes en la parte izquierda es posible apreciar que al ingresar las señales $x[n]$ & $h[n]$ una vez terminado cada proceso el programa ofrece la visualización de la señal ingresada, es posible modificar las señales ingresadas volviéndolas a ingresar presionando nuevamente el botón correspondiente.

Figuras 90: secuencia almacenada $x[n]$ Figura 91: secuencia almacenada $h[n]$



Figuras 92
cálculo de la DFT

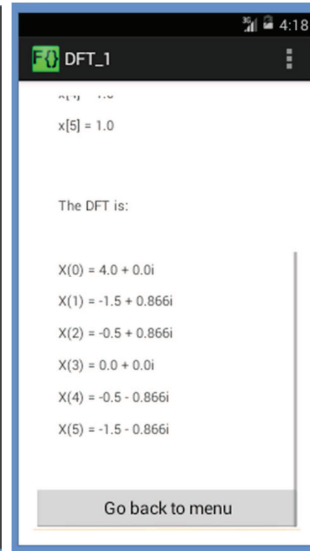


Figura 93
cálculo de la DFT

Una vez ingresadas las secuencias, es posible obtener la DFT, los espectros de magnitud y de Fase, en la imagen se aprecia el resultado de la DFT para la señal ingresada $x[n]$; para obtener los espectros de magnitud y fase así como la DFT solo es necesario ingresar $x[n]$, sin embargo para efectuar la animación de la convolución es necesario ingresar tanto $x[n]$ como $h[n]$; si una señal falta por ser ingresada, se indica mediante un mensaje al usuario que es necesario ingresarla, de esta manera la aplicación no opera sobre variables nulas y se evita un error.

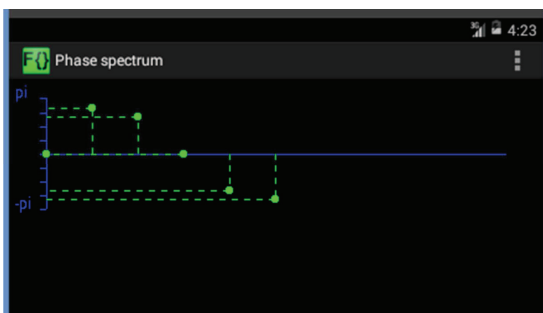


Figura 94
mensajes de error



Figura 95
mensajes de error

En las imágenes de la parte izquierda se pueden apreciar los mensajes al usuario en caso de que falte ingresar $x[n]$ o ambas señales, como se mencionó, esto previene errores.



El diagrama de espectro de fases grafica cada una de las fases en un intervalo de $-\pi$ a π , en este caso es relativamente sencillo graficar, dado que los límites de la variable dependiente son constantes.

Figura 96: espectro de Fases

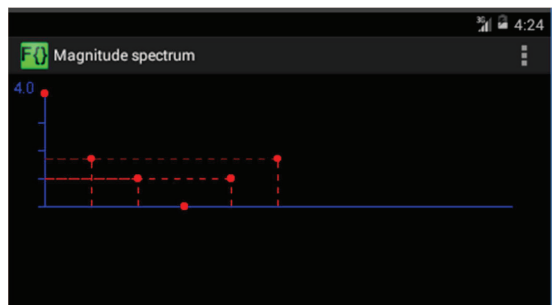


Figura 97: espectro de magnitudes

El diagrama de espectro de magnitudes presentó la complicación de que los valores son variables y no están en un intervalo fijo, esto hizo necesario que se normalizaran los valores al momento de graficar, se buscó el máximo de entre todas las magnitudes y se utilizó este valor como referencia, estableciendo para él la cantidad máxima de pixeles, misma que depende de las características de cada teléfono y se adapta.

La convolución de las señales $x[n]$ & $h[n]$ especifica el color de cada señal y como las otras gráficas

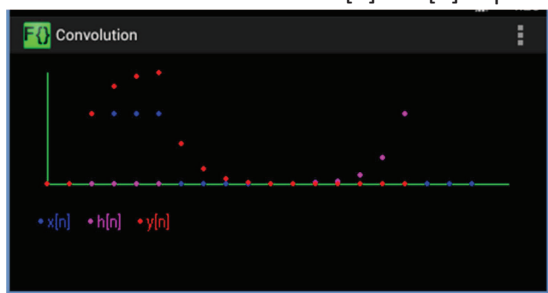


Figura 98: convolución

se adapta a cada teléfono, de igual manera se normalizó la cantidad máxima de entre las tres señales $x[n]$, $h[n]$ & $y[n]$ asignándole la cantidad máxima de pixeles en el eje de las ordenadas, el programa también puede graficar cantidades negativas y en este caso se normaliza la cantidad máxima sumándole el absoluto de la cantidad mínima reservando así espacio para la parte negativa

- ii. Indicar la compatibilidad con la versión del SO Android.

El programa fue compilando utilizando la versión 4.4 KitKat del sistema operativo Android, sin embargo se estableció que el sistema mínimo SDK requerido para ejecutar el programa fuera la versión 2.2 Froyo, esto con el fin de permitir que funcione el programa en una mayor cantidad de dispositivos móviles.

- iii. Elaborar un manual de instalación.

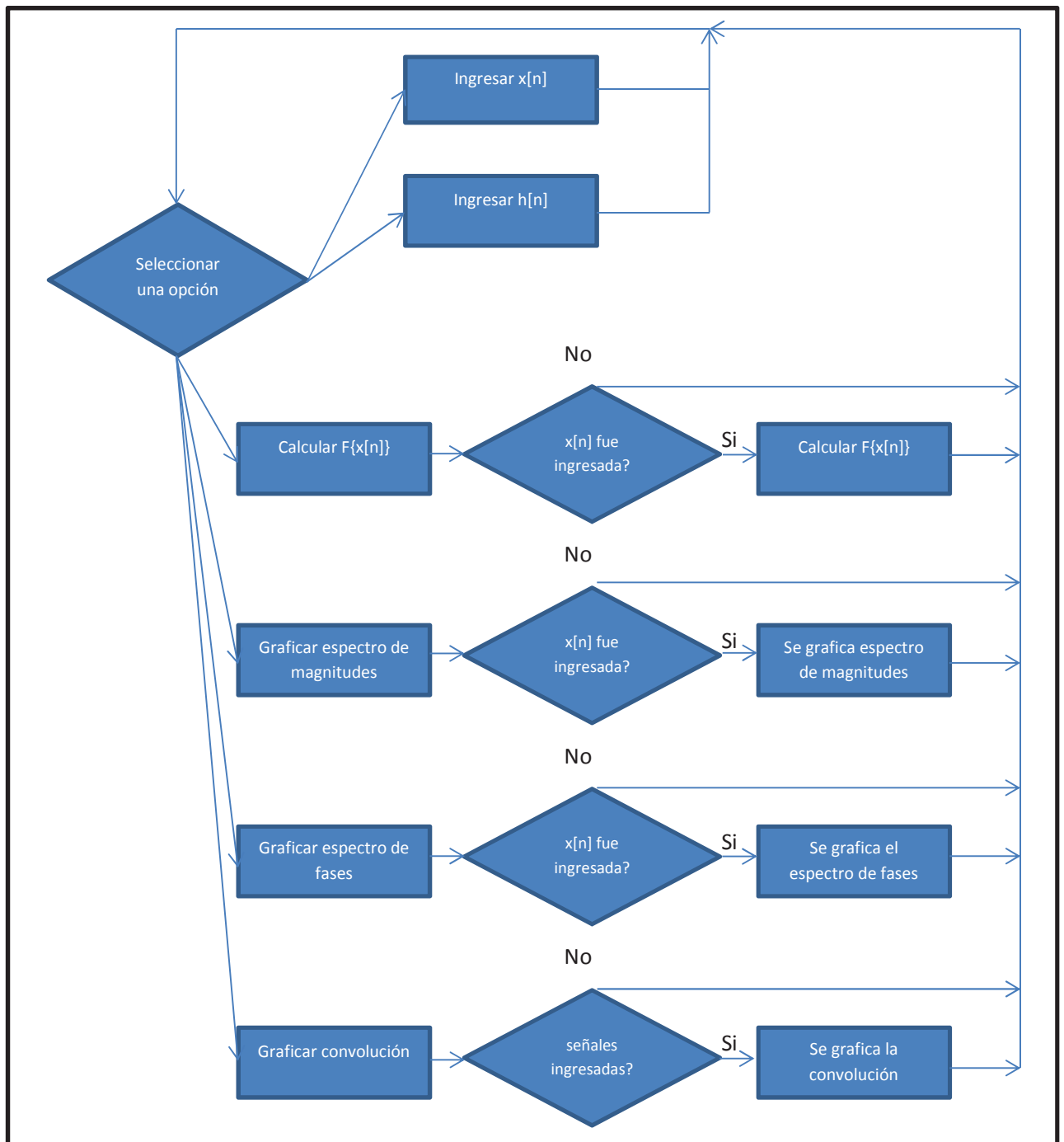
1. Una vez listo el proyecto generar el archivo .apk de instalación.
2. Transferir el archivo al celular o Tablet para instalar
3. Abrir el archivo desde el celular y seleccionar "instalar" con el instalador de paquetes.

REQUISITOS DE ENTREGA:

- Generar el archivo .APK de instalación y adjuntarlo en un CD.
- Adjuntar el código utilizado.
- Documentar con imágenes.



iv. Elaborar un diagrama de flujo.



Cuadro 18: diagrama de flujo



5.5 Proyecto de aplicación B: “FFT aplicado a un generador de señales”

OBJETIVO GENERAL:

Con ayuda de un osciloscopio digital y el algoritmo FFT implementado en él, el alumno obtendrá las transformadas discretas de Fourier de distintas señales de manera gráfica y las comparará con las calculadas previamente. Este proyecto cubre los temas de transformada discreta de Fourier y Transformada rápida de Fourier

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) El alumno diseñará y construirá dos circuitos generadores de funciones, uno digital y uno analógico
- ii) El alumno aplicará el algoritmo FFT a cada señal de cada circuito utilizando el osciloscopio digital.
- iii) El alumno calculará la transformada rápida de Fourier de cada señal utilizando MATLAB

Nota: la intención de este proyecto es verificar gráficamente la forma del espectro en frecuencia de las señales involucradas.

INFORMACIÓN ADICIONAL

Existen dos dispositivos especializados en obtener la caracterización de una señal ya sea eléctrica, óptica o acústica, estos son el analizador de espectro y el analizador vectorial de señales, el cual está sustituyendo al primero. Estos aparatos se encargan de medir las componentes de frecuencia de una señal, para ello utilizan una escala logarítmica en dBm y el resultado posee el contenido espectral de la señal. En el caso del instrumento vectorial, es más rápido que el escalar y realiza un barrido con un ancho de banda que es más grande que el de las señales medidas en cuestión, lo cual garantiza la medición de todas las componentes de la señal.

El osciloscopio digital es un instrumento que no está especializado en la medición de las componentes en frecuencia de una señal, pero que mediante el algoritmo de la FFT permite obtener un buen resultado para señales cuyo ancho de banda no superen al del dispositivo [15].

INSTRUCCIONES:

- i. Diseñe un generador de funciones analógico y uno digital que puedan generar como salida señales de tipo:
 - Senoidal
 - Triangular
 - Pulso rectangular

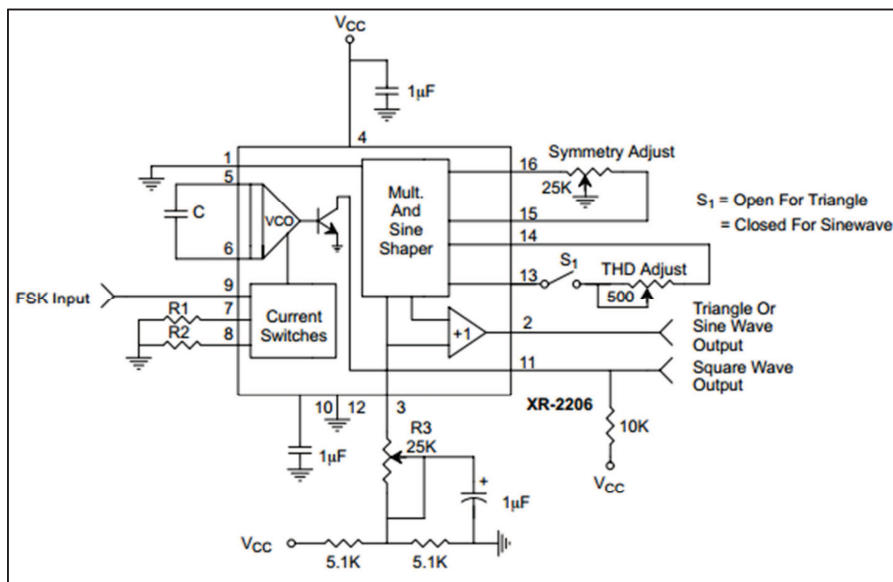


- ii. Obtenga la FFT de cada señal para cada circuito mediante el osciloscopio digital.
- iii. Calcule y grafique en MATLAB la FFT de las mismas señales indicadas en el inciso i.
- iv. Compare los resultados obtenidos y documente los resultados con fotografías e imágenes.

Nota: los puntos ii al iv pueden ser reportados en una tabla comparativa con las correspondientes observaciones

REPORTE:

- i. Diseñe un generador de funciones analógico y uno digital que puedan generar como salida señales de tipo:
 - Senoidal
 - Triangular
 - Pulso rectangular



Se optó por utilizar el circuito integrado XR2206 para construir el generador analógico y la tarjeta de desarrollo Discovery STM32; en el caso del generador analógico, se utilizó el circuito del prueba contenido en la figura dos de la hoja de especificaciones del circuito integrado XR2206

Figura 100: diagrama del generador de funciones

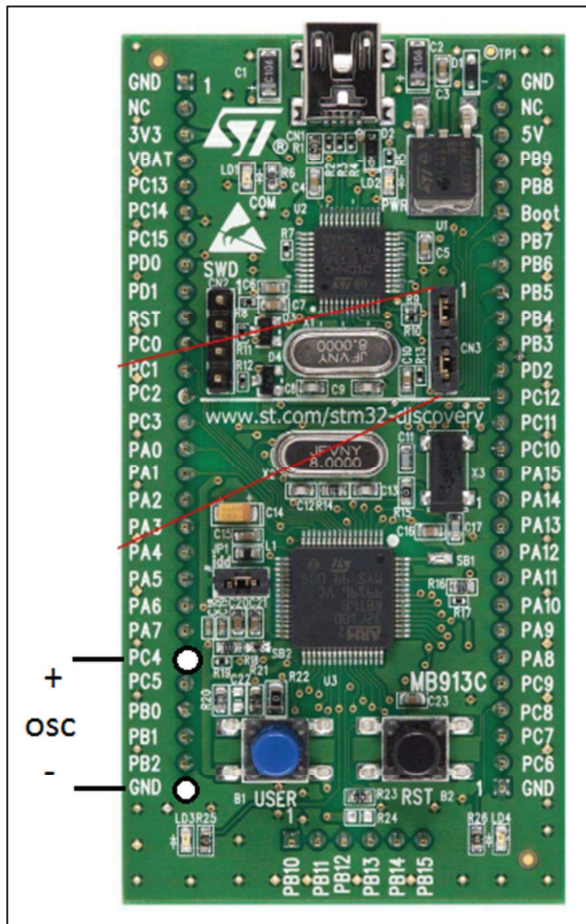


Figura 101: conexión al osciloscopio del generador digital

Para la elaboración del generador digital se programó la tarjeta de desarrollo en c, con el entorno de desarrollo “microC pro for arm”; como se puede ver en la imagen, la salida analógica corresponde al puerto A terminal cuatro, es aquí donde se conectó el osciloscopio para realizar las mediciones correspondientes.

Se incluye el código del programa correspondiente y se hace notar que para la elaboración del mismo se hizo uso de interrupciones, una de ellas depende de la pulsación de un botón (USER –en color azul-) y se encarga de cambiar el tipo de señal; la otra interrupción se encarga de cambiar el valor del voltaje de salida del DAC (terminal 4 del puerto A), es en esta interrupción donde se cambia el valor dependiendo de la función: seno, rampa o pulso cuadrado.



```
sbit LED_AZUL at GPIOC_ODRbits.B8;
sbit LED_VERDE at GPIOC_ODRbits.B9;

void Config_ptos(void);
void Config_Int(void);
int opcion;

void isr() iv IVT_INT_EXTIO ics ICS_AUTO
{
    EXTI_PRbits.PR0 = 1; //limpiar la bandera de la interrupcion al inicio de la ISR
    opcion++;
    if(opcion==4)
        opcion=0;
    if(opcion==1)
    {
        LED_VERDE=0;
        LED_AZUL=1;
    }

    if(opcion==2)
    {
        LED_VERDE=1;
        LED_AZUL=0;
    }

    if(opcion==3)
    {
        LED_VERDE=1;
        LED_AZUL=1;
    }
}

float seno;
const unsigned int vector[] = {2048,2831,3495,3939,4095,3939,3495,2831,2048,1264,600,156,0,156,600,1264,2047};
const unsigned int vector2[] = {2048,2831,3495,3939,4095,3939,3495,2831,2048,1264,600,156,0,156,600,1264,2047};
unsigned short int dato_actual;
unsigned int val;
int decision;
void Caden() iv IVT_INT_TIM3 ics ICS_AUTO
{
    TIM3_SR.UIF = 0;
    dato_actual++;

    if(dato_actual == 180)
    {
        dato_actual = 0;
        if(decision==0)
            decision=1;
        else
            decision=0;
    }
    if(opcion==3)
    {
        if(decision==0)
            val = sinE3(dato_actual)+1000;
        else
            val = 1000-sinE3(dato_actual);
        //val = vector[dato_actual];
        //val = 500; //sin(dato_actual*3.15/180)*1000+1000;
    }
}
```

Figura 102: código del generador digital, micro C.



```
if(opcion==0)
{
    if(decision==0)
        val = 0;
    else
        val = 1800;
    //val = vector[dato_actual];
    //val = 500; //sin(dato_actual*3.15/180)*1000+1000;
}
if(opcion==1)
{
    if(decision==0)
        val = dato_actual*10;
    else
        val = 1800-dato_actual*10;
    //val = vector[dato_actual];
    //val = 500; //sin(dato_actual*3.15/180)*1000+1000;
}

DAC_DHR12R1 = val;
DAC_SWTRIGRbits.SWTRIG1 = 1;
}

void main()
{
    decision =0;
    opcion =0;
    //unsigned int valor = 0;
    //seno = sinE3(valor);
    dato_actual = 0;
    RCC_APB1ENR.TIM3EN = 1;
    TIM3_CR1.CEN = 0;
    TIM3_PSC = 7;
    TIM3_ARR = 142;
    NVIC_IntEnable(IVT_INT_TIM3);
    TIM3_DIER.UIE = 1;
    TIM3_CR1.CEN = 1;
    //DAC
    GPIO_Analog_Input(&GPIOA_BASE,_GPIO_PINMASK_4);
    RCC_APB1ENR.B29 = 1;
    DAC_CRbits.EN1 = 1;
    DAC_CRbits.BOFF1 = 1;
    DAC_CR += 0x38;
    DAC_CRbits.TEN1 = 1;

    Config_ptos();
    Config_Int();

    while(1);
}

void Config_ptos(void)
{
    GPIO_Digital_Input(&GPIOA_BASE,_GPIO_PINMASK_0);
    GPIO_Digital_Output(&GPIOC_BASE,_GPIO_PINMASK_8|_GPIO_PINMASK_9);
    LED_VERDE=0;
    LED_AZUL=1;
}

void Config_Int(void)
{
}
```

Figura 102: código del generador digital, micro C.



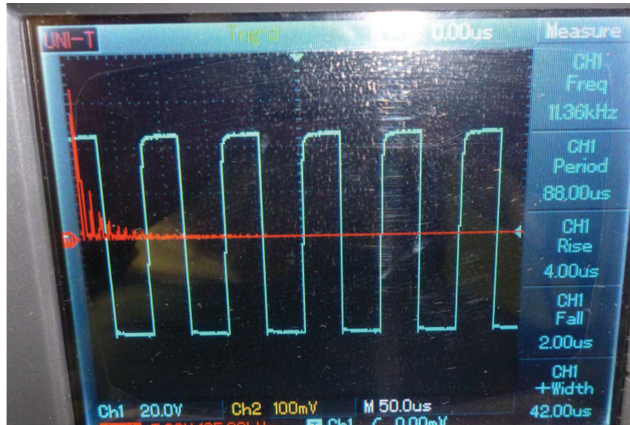
```
RCC_APB2ENRbits.AFIOEN=1; //HABILITA EL MÓDULO AFIO DE LOS PUERTOS
AFIO_EXTICR1=0; //la interrupcion 0 la genera PA0
EXTI_IMRbits.MR0 = 1; //habilita la interrupcion externa 0
EXTI_RTSRbits.TR0=1; //selector del registro para el fco ascendente. %dispara la interrupcion con fco ascendente
NVIC_IntEnable(IVT_INT_EXTIO); //enmascara la interrupcion en el NVIC,
EnableInterrupts(); //habilita las interrupciones
}
```

Figura 102: código del generador digital, micro C.

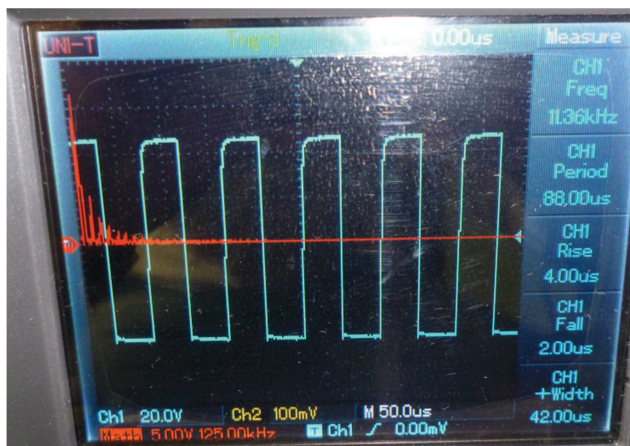
- ii. Obtenga la FFT de cada señal para cada circuito mediante el osciloscopio digital.
- iii. Calcule y grafique en MATLAB la FFT de las mismas señales indicadas en el inciso i.
- iv. Compare los resultados obtenidos y documente los resultados con fotografías e imágenes.



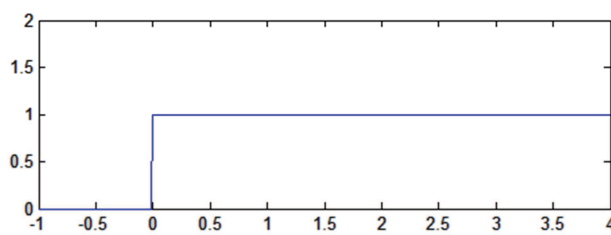
Señal cuadrada



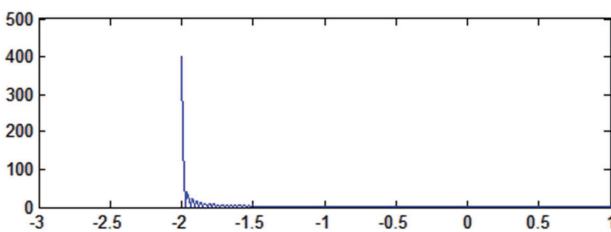
Generador analógico



Generador digital



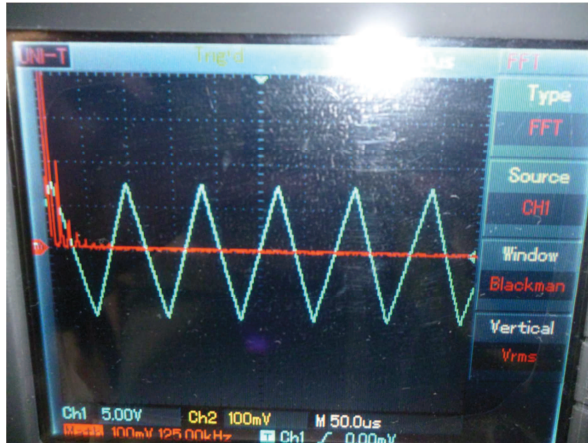
Señal cuadrada graficada en MATLAB



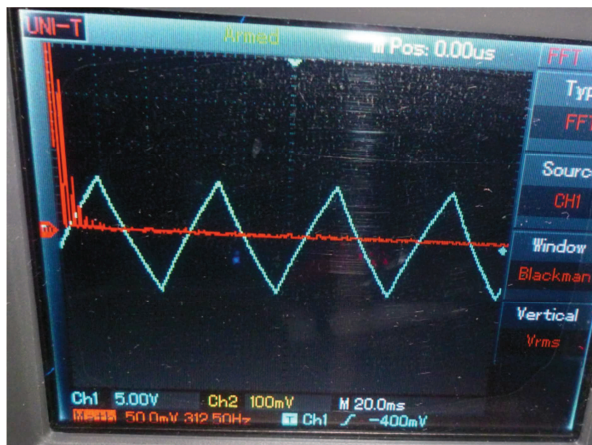
Espectro de frecuencias para la señal pulso rectangular.



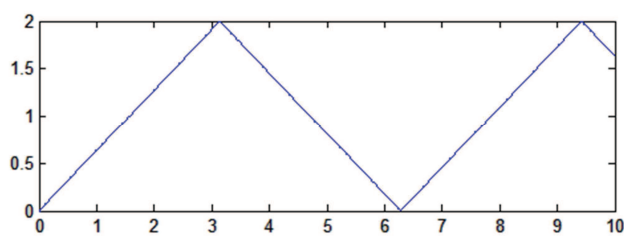
Señal triangular



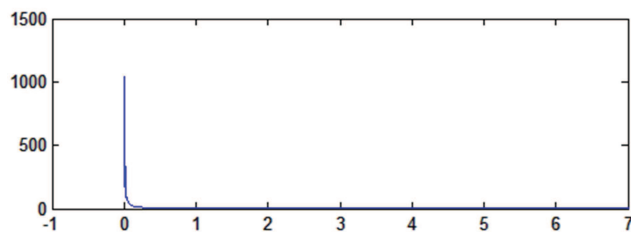
Generador analógico



Generador digital



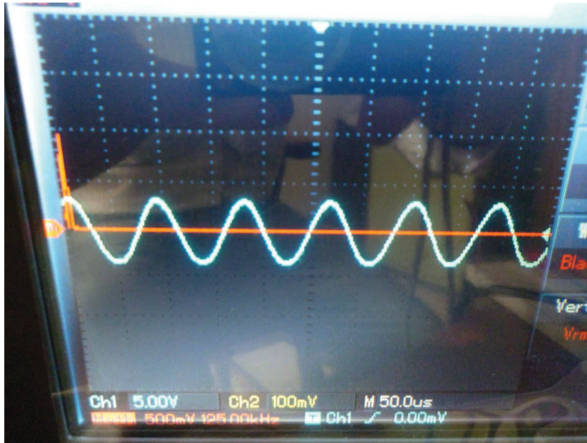
Señal triangular graficada en MATLAB



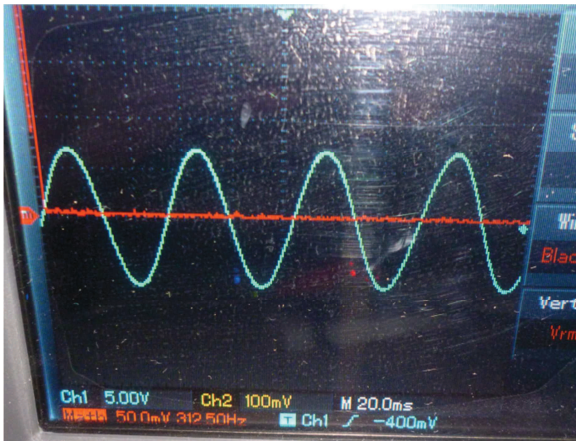
Espectro de frecuencias para la señal triangular.



Señal senoidal



Generador analógico



Generador digital

Tabla 27: el osciloscopio y la FFT

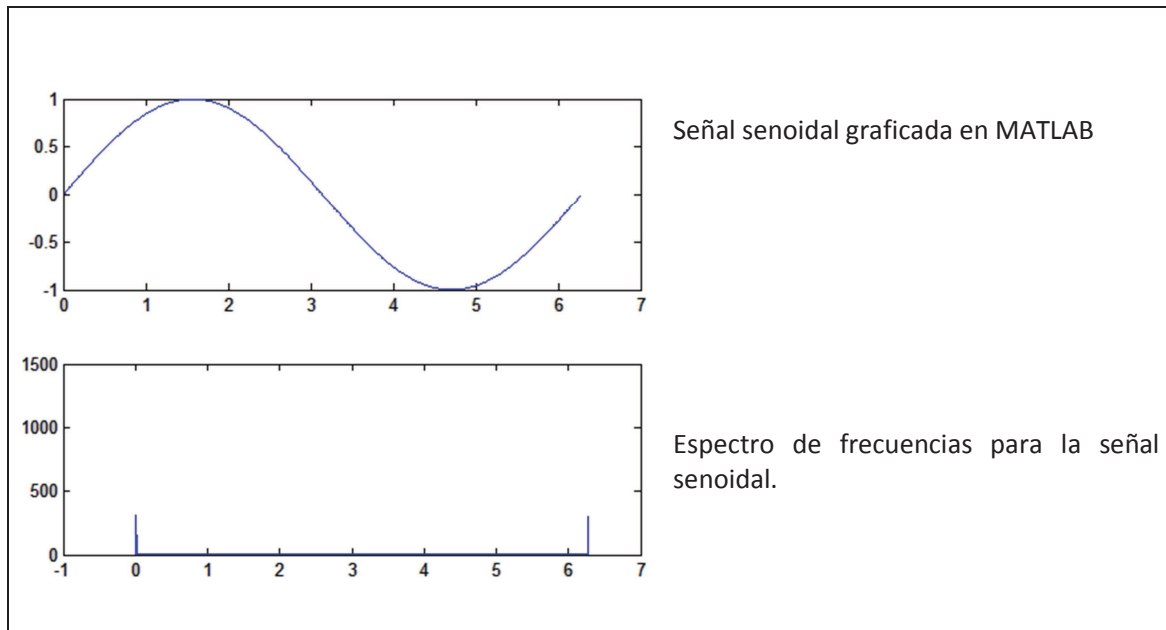


Tabla 27: el osciloscopio y la FFT

La comparación entre las gráficas obtenidas en MATLAB indican una gran similitud con la forma del espectro obtenido en el osciloscopio, tanto por el generador digital como el analógico; sin embargo se alcanza a notar ciertas diferencias entre las señales generadas por la parte digital y la parte analógica. Un circuito digital trabaja con muestras discretas y una secuencia de valores, en este caso se aprovechó la velocidad de la tarjeta de desarrollo y en un principio no se notó alguna diferencia con la señal analógica en los tres casos; sin embargo al obtener en el osciloscopio la FFT se alcanzan a ver picos pequeños a lo largo de la gráfica, en las señales analógicas no se aprecian tantos picos pequeños, esto debido a que una señal digital está formada por la suma de muchísimas componentes senoidales, mismas que representan componentes de frecuencia normalmente de pequeños valores de amplitud.

REQUISITOS DE ENTREGA:

- Incluya el código y el diseño del hardware.
- Anexa las gráficas de cada señal, ya sea una foto del osciloscopio o una imagen, en una tabla comparativa.
- Incluya sus comentarios sobre las señales del generador digital vs generador analógico vs cálculo en MATLAB.



5.5 Proyecto de aplicación C: Reconocimiento de audio

OBJETIVO GENERAL:

El alumno generará tonos musicales con MATLAB y con la ayuda del algoritmo FFT comparará los sonidos.

OBJETIVO PARTICULAR:

- i) El alumno generará los tonos correspondientes a una octava musical con la ayuda de MATLAB.
- ii) El alumno obtendrá y graficará la FFT de dos tonos puros elegidos por el usuario.
- iii) El alumno comparará y determinará la igualdad de los tonos elegidos por el usuario.

INFORMACIÓN ADICIONAL

Las señales acústicas representan un gran número de aplicaciones en las que se aplica el procesamiento digital de señales, una de las más conocidas y útiles es el reconocimiento de voz, cuya utilidad es muy grande. El reconocimiento de voz tiene aplicaciones militares, automotrices, educativas, telefónicas, científicas, de salud, etc.

AT&T introdujo en 1992 servicios de marcado activado por voz, su sistema era conocido como Call Processing System, dicho sistema para 1993 procesaba ya 50 millones de llamadas por mes. Durante la misma década se generaron reportes clínicos en salas de emergencia en EEUU por medio de la voz, esto luego se extendió a otras áreas de los hospitales. Esto fue sólo el principio y hoy en día las aplicaciones se diversifican y crecen rápidamente.

INSTRUCCIONES:

- i. Genere en MATLAB los tonos correspondientes a una octava musical.
- ii. Obtenga el espectro en frecuencia de cada uno de los tonos puros.
- iii. Realice un script que compare el FFT de dos tonos puros escogidos por el usuario.



REPORTE:

- i. Genere en MATLAB los tonos correspondientes a una octava musical.
- ii. Obtenga el espectro en frecuencia de cada uno de los tonos puros.

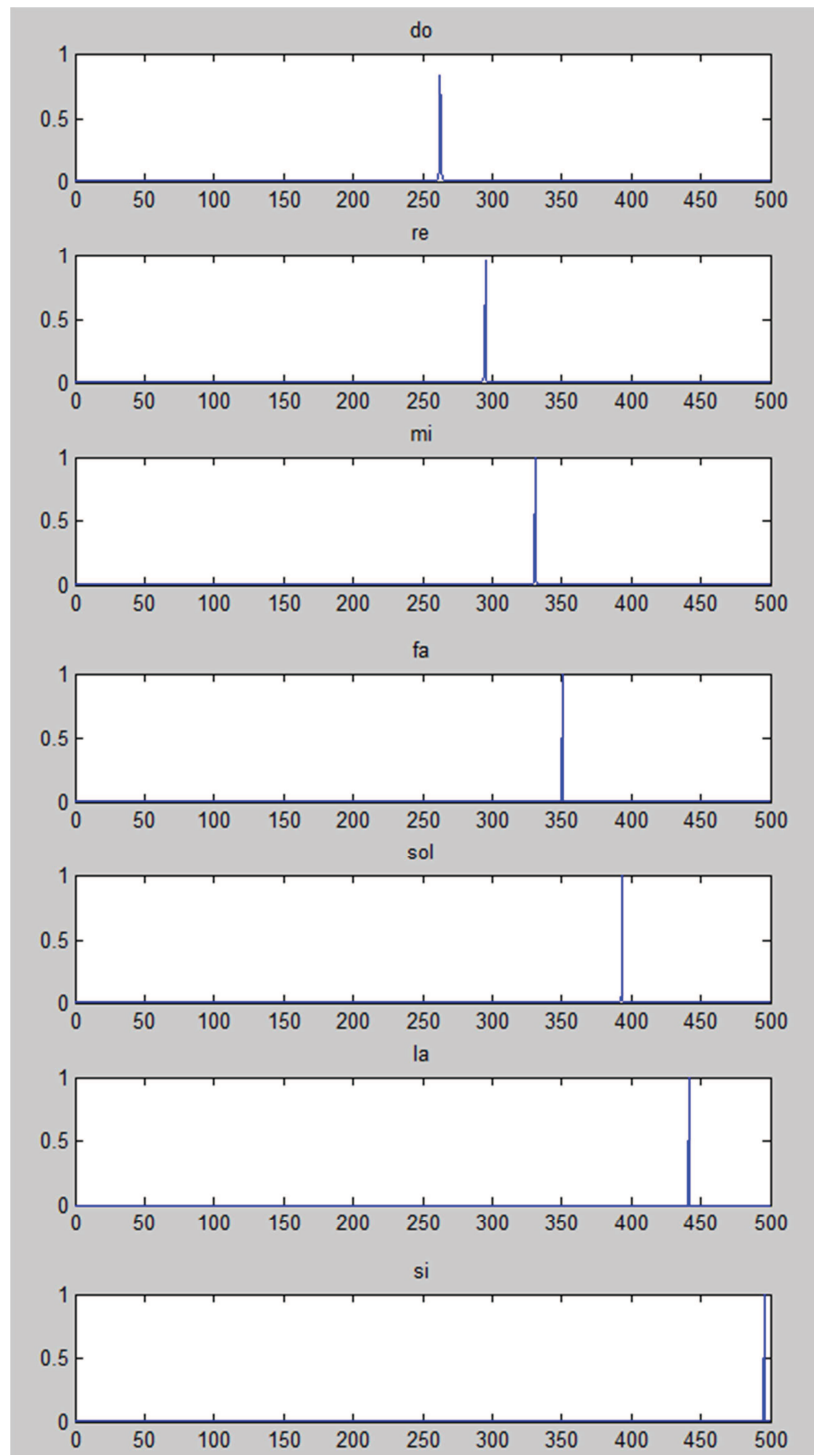


Figura 103: espectro de frecuencias
para las notas musicales



Octava musical:

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI
261.63 Hz	293.66 Hz	329.63 Hz	349.23 Hz	392 Hz	440 Hz	493.88 Hz

Tabla 28: octava musical

iii. Realice un script que compare el FFT de dos tonos puros escogidos por el usuario.

```
opcion =400;
start = 1;
last = 88200;
x = (1:1:1000)/2;

figure(1);

file2='0.0do.wav';

[t2, fs2] = wavread(file2);
user = t2(start:last);
userftemp = fft (user);
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);
userf = userftemp (1:1000);
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));

%hold on;
subplot (3,1,1);
plot (x,userfn2)
title('do');

file2='0.1re.wav';

[t2, fs2] = wavread(file2);
user = t2(start:last);
userftemp = fft (user);
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);
userf = userftemp (1:1000);
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));

hold on;
subplot (3,1,2);
plot (x,userfn2)
title('re');

file2='0.2mi.wav';

[t2, fs2] = wavread(file2);
user = t2(start:last);
userftemp = fft (user);
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);
userf = userftemp (1:1000);
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));
```



```
%hold on;
subplot (3,1,3);
plot (x,userfn2)
title('mi');

figure(2);

file2='0.3fa.wav';

[t2, fs2] = wavread(file2);
user = t2(start:last);
userftemp = fft (user);
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);
userf = userftemp (1:1000);
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));

%hold on;
subplot (3,1,1);
plot (x,userfn2)
title('fa');

file2='0.4sol.wav';

[t2, fs2] = wavread(file2);
user = t2(start:last);
userftemp = fft (user);
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);
userf = userftemp (1:1000);
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));

hold on;
subplot (3,1,2);
plot (x,userfn2)
title('sol');

file2='0.5la.wav';

[t2, fs2] = wavread(file2);
user = t2(start:last);
userftemp = fft (user);
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);
userf = userftemp (1:1000);
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));
%hold on;
subplot (3,1,3);
plot (x,userfn2)
title('la');
figure(3);
file2='0.6si.wav';
```



```
user = t2(start:last);  
userftemp = fft (user);  
userftemp = userftemp.*conj (userftemp);  
userf = userftemp (1:1000);  
userfn2 = userf/sqrt(sum (abs (userf).^2));  
  
%hold on;  
subplot (3,1,1);  
plot (x,userfn2)  
title('si');
```

Figura 104: script para el
reconocimiento de audio

REQUISITOS DE ENTREGA:

- Anexa el código del script realizado.
- Incluye en un CD el código del script y los archivos de audio necesarios para que el programa funcione.



CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES



Para la elaboración de este manual fue necesario hacer una revisión detallada de los primeros ensayos de las prácticas que los alumnos realizaron en semestres anteriores para conocer las ideas generales en torno al presente trabajo, mismo que surgió con el fin de proponer una alternativa a los profesores en el laboratorio de PDS.

En muchos casos, los alumnos tomaban caminos diferentes a lo que se esperaba, algunos realizaban ejercicios de manera incorrecta cuando la complejidad de la programación involucrada aumentaba, es por ello que el manual consta de instrucciones que guíen al estudiante en el desarrollo de cada práctica, así mismo el manual muestra a detalle lo que se espera que el alumno entregue como práctica resuelta, fue notable que cuando se suscitaban errores, muchas de las veces era por la falta de los comandos adecuados, lo cual trajo como consecuencia la aparición de un elemento importante en este manual: la lista de comandos, con este apoyo se busca englobar los comandos más importantes utilizados en cada práctica, de manera que el estudiante ahorre tiempo y logre realizar la práctica de manera acertada.

Como se dijo, se resolvieron ejercicios y señales propuestos al azar con el fin de ilustrar el proceso. A continuación se ENNUMERAN algunos de las dificultades que tuvieron que se presentaron durante el desarrollo del presente trabajo:

1) Equivalencia de resultados:

En muchas ocasiones el paquete MATLAB devolvía resultados que si bien no eran incorrectos eran presentados en formas distintas a los cálculos realizados matemáticamente, esto sugirió aplicar álgebra para verificar si ambos resultados eran correctos.

2) Propiedades no aplicables

Al desarrollar ciertos ejercicios en MATLAB, muchas de las propiedades, sobre todo en transformada 'z', no podían ser aplicadas de manera directa, se obtenían resultados no equivalentes y en este caso las fórmulas de las propiedades tenían que ser programadas para obtener un resultado consistente, en este caso el comando "subs" fue de gran utilidad, pues permite realizar cambios de variable dentro de una ecuación.



3) Funciones

No obstante que MATLAB es un paquete muy completo, algunas de las funciones están documentadas de una manera muy particular, como por ejemplo la función de Heaviside utilizada para suplir al escalón unitario, dicha función es distinta del escalón por un factor de un medio que se le agrega y por lo tanto no es útil en muchos de los casos, sino que debe ser programada por los estudiantes para obtener gráficas y cálculos.

4) Gráficas

Uno de los objetivos fue dotar a los estudiantes de comandos suficientes para generar gráficas que poseyeran una buena imagen y límites dentro del marco que permitiesen observar a detalle características importantes, esto se logró y consumió una cantidad de tiempo considerable en la práctica uno, pues fue ahí donde se determinó y aplicaron los métodos para generar gráficas de manera acertada.

5) Información adicional

Durante cada práctica se buscaron extractos de información relacionada a temas actuales de tecnología que estuviesen relacionados con el Procesamiento Digital de Señales, sus avances y su historia. Fue precisamente encontrar avances relacionados con cada tema en específico lo que supuso un pequeño desafío, pues aunque se logró, muchas de las veces cada tema era muy específico.

Todas estas cuestiones permitieron diseñar el manual conformado por diez prácticas. Con ayuda de este manual, el estudiante se sintió respaldado para la elaboración de cada una de las prácticas, pues contaba con una estructura bien definida que le permitía conocer objetivos, planteamiento, desarrollo, etc. Finalmente el estudiante logró visualizar la importancia de esta unidad de aprendizaje en diferentes aplicaciones empleadas en la industria. Este trabajo no termina con la culminación de esta tesis, sino que queda a disposición de la academia de comunicaciones para su análisis y mejora en pro del laboratorio de PDS.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Moore (2007). MATLAB para ingenieros; Ed Pearson, Prentice Hall; Naucalpan.
- [2] ICE (2005). Programa sintético de la carrera Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica de la ESIME Zacatenco del IPN.
- [3] PDS (2005). Programa sintético de la materia de Procesamiento Digital de Señales de la ESIME Zacatenco del IPN.
- [4] MITRA(2007).Procesamiento Digital de señales; Ed Mc Graw Hill; Madrid.
- [5] Proakis, Manolakis (2007); Tratamiento Digital de Señales; Ed Pearson, Prentice Hall; Madrid.
- [6] Roberts (2005). Señales y sistemas ED McGrawHill(2ªEdición) Tennessee
- [7] Baranenkoy, Demidovich (1980); Ed MIR; Moscú.
- [8] <http://www.mathworks.com/>
- [9] <http://www.fib.upc.edu/>
- [10] <http://www.ni.com/white-paper/2758/en/>
- [11] <http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/fs2008/nas/woerner.pdf>.
- [12] Oppenheim, Willsky (1998). Señales y sistemas ED Pearson Education; Massachusetts
- [13] Autores varios; Diseño de filtros FIR; 2012; Escuela superior de ingeniería, Universidad de Valencia.
- [14] <http://es.wikipedia.org/wiki/Android>
- [15] http://es.wikipedia.org/wiki/Analizador_vectorial_de_se%C3%B1ales

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- [1] Chevallard, Y. (1991). La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. [] Aique, Argentina.
- [2] Collette, J. (2007). Historia de las Matemáticas II. Mexico: Siglo Ventinuo Editores.
- [3] Glyn, J. (2002). Matemáticas avanzadas para ingeniería. México: Prentice Hall. 2ª edición.
- [4] Guanella, G. (1941). Electrical Oscillations Translating Systems, U. S. Patent 2.
- [5] Harrison, H. (1974). Controles automáticos. México: Trillas.

- [6] Jury, E. (1954). Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems. U.S.A: AIEE Transactions.
- [7] Kamen, E. (2008). Señales y Sistema usando la web y Matlab. México: Prentice Hall.
- [8] Kline, M. (2006). Matemáticas, la perdida de la certidumbre. Mexico: Siglo Ventinuo Editores.
- [9] Kuo, B. (1991). Sistemas Automáticos de control. México: Prentice Hall.
- [10] MacColl, L. (1945). Fundamental theory of Servomechanisms. New York. Chapter X.
- [11] Mayr. O. (1970). The Origins of Feedback Control, MIT Press, Cambtidge, MA.
- [12] Meade, M. (1993). Señales y sistemas, modelos y comportamiento. Wilmigton, Delaware, E.U.A.: Addison-Wesley Iberoamericana. 2a ed.
- [13] Oppenheim, A. (1998). Señales y Sistemas. México: Prentice Hall. 2ª edición.
- [14] Ragazzini, J. y Zadeh, L. (1952). The Analysis of Sampled-Data Systems. U.S.A: AIEE Transactions.
- [15] Tsyppkin, Y. (1955). Theory of Relay Systems in Automatic Control. Moscow.
- [16] Zill, D. (2009). Introducción al análisis complejo con aplicaciones. U.S.A.: Cengage Learning.
- [17] Churchill, R. (2004). Variable compleja y aplicaciones. España: Mc Graw Hill.
- [18] Linvill. W. K. (1951). Sampled-Data Control Systems Studied Through Comparison of Sampling with Amplitude Modulation. AIEE Trans.
- [19] Porter. A y Lawden. D. F. (1950). A New Approach to the Desing of Pulse Monitored Servosystems. Proc. IEE. London.
- [20] Ragazzini. J. R y Franklin. G. (1958). Sampled-data Control Systems. New York: McGraw Hill.
- Rivera, A. (2013) Cálculo integral: sucesiones y series de funciones. México, Grupo Editorial Patria.
- [21] Rivera, A. (2013) Lecturas sobres sucesiones y series infinitas. México.
- [22] Tsyppkin. Ya. Z. (1955). Theory of Impulse Systems. Moscow.