

# 第三节课习题

深蓝学院讲师高翔

2018 年 6 月 1 日

## 1 习题说明

- 第  $i$  节课习题所有材料打包在  $Li.zip$  中,  $\forall i = 1 \dots 8$ 。
- 习题分为若干种: **计算类**习题, 需要读者编程计算一个实际问题, 我们会附有参考答案以供自测。**操作类**习题, 会指导读者做一个具体的实验, 给出中间步骤截图或结果。**简述类**习题则提供阅读材料, 需要读者阅读材料后, 回答若干问题。
- 每个习题会有一定的分值。每次习题分值加和为 10 分。你需要获得 8 分以上才能得到“通过”的评价。带 \* 的习题为附加题, 会在总分之外再提供一定的分值, 所以总和可能超过 10 分。换句话说, 你也可以选择一道附加题, 跳过一道正常题。
- 每道习题的给分由助教评判, 简述类习题可能存在一定开放性, 所以评分也存在主观因素。
- 请利用深蓝学院系统提交习题。每次习题我们会记通过与否。提交形式为 word 或 pdf 格式报告, 如有编程习题请提交可编译的源码。
- 为方便读者, 我通常会准备一些阅读材料, 放在 books/ 或 papers/ 目录下。请读者按个人需求使用这些材料。它们多数是从网络下载的, 如果侵犯到你的权利, 请及时告诉我。
- 每个习题会标注大致用时, 但视同学个人水平可能会有出入。
- 习题的完成情况会影响你对本课程内容的掌握程度, 请认真、独立完成。**习题总得分较高的同学将获得推荐实习就业的资格, 并有机会获得深蓝学院“旷视科技奖学金”和“悉见科技奖学金”。**

## 2 群的性质 (2 分, 约 1 小时)

课上我们讲解了什么是群。请根据群定义, 求解以下问题:

1.  $\{\mathbb{Z}, +\}$  是否为群? 若是, 验证其满足群定义; 若不是, 说明理由。

2.  $\{\mathbb{N}, +\}$  是否为群? 若是, 验证其满足群定义; 若不是, 说明理由。

其中  $\mathbb{Z}$  为整数集,  $\mathbb{N}$  为自然数集。

### 3 验证向量叉乘的李代数性质 (2 分, 约 1 小时)

我们说向量和叉乘运算构成了李代数, 现在请你验证它。书中对李代数的定义为: 李代数由一个集合  $\mathbb{V}$ , 一个数域  $\mathbb{F}$  和一个二元运算  $[,]$  组成。如果它们满足以下几条性质, 称  $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$  为一个李代数, 记作  $\mathfrak{g}$ 。

1. 封闭性  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathbb{V}$ .
2. 双线性  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$ , 有:

$$[a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \quad [\mathbf{Z}, a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}] = a[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + b[\mathbf{Z}, \mathbf{Y}].$$

3. 自反性<sup>1</sup>  $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, \mathbf{X}] = \mathbf{0}$ .
4. 雅可比等价  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{V}, [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = \mathbf{0}$ .

其中二元运算被称为李括号。

现取集合  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ , 数域  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , 李括号为:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{1}$$

请验证  $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$  构成李代数。

---

<sup>1</sup> 自反性是指自己与自己的运算为零。

## 4 推导 SE(3) 的指数映射 (2 分, 约 1 小时)

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导, 但对于 SE(3), 仅介绍了结论, 没有给出详细推导。请你完成 SE(3) 指数映射部分, 有关左雅可比的详细推导。

设  $\xi = [\rho, \phi]^T \in \mathfrak{se}(3)$ , 它的指数映射为:

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \rho \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

令  $\phi = \theta \mathbf{a}$ , 那么:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n = \frac{\sin \theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \mathbf{a}^\wedge \triangleq \mathbf{J}. \quad (3)$$

这也正是课件里提到的左雅可比。

提示: 类比于 SO(3) 的泰勒展开, 然后合并奇偶数项级数即得。

## 5 伴随 (2 分, 约 1 小时)

在  $SO(3)$  和  $SE(3)$  上, 有一个东西称为伴随 (Adjoint)。下面请你证明  $SO(3)$  伴随的性质。

对于  $SO(3)$ , 有:

$$\mathbf{R} \exp(\mathbf{p}^\wedge) \mathbf{R}^T = \exp((\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge). \quad (4)$$

此时称  $\text{Ad}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ 。

提示: 首先你需要证明  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge \mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{a})^\wedge$ , 页面 <https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3> 提示了一种简洁的途径。

对于  $SE(3)$ , 有:

$$\mathbf{T} \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \mathbf{T}^{-1} = \exp((\text{Ad}(\mathbf{T})\boldsymbol{\xi})^\wedge) \quad (5)$$

其中  $\text{Ad}(\mathbf{T})$  定义为:

$$\text{Ad}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t}^\wedge \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

这个性质将在后文的 Pose Graph 优化中用到。但是  $SE(3)$  的证明较为复杂, 不作要求。

完整的  $SO(3)$  和  $SE(3)$  性质见1和2。

表 1:  $SO(3)$  性质与其近似形式

李代数	李群	(左) 雅可比
$\mathbf{u}^\wedge = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{C} = \exp(\phi^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n$ $\equiv \cos \phi \mathbf{1} + (1 - \cos \phi) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top + \sin \phi \mathbf{a}^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \phi^\wedge$	$\mathbf{J} = \int_0^1 \mathbf{C}^\alpha d\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{1} + (1 - \frac{\sin \phi}{\phi}) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top + \frac{1 - \cos \phi}{\phi} \mathbf{a}^\wedge$ $\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2} \phi^\wedge$
$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v})^\wedge \equiv \alpha \mathbf{u}^\wedge + \beta \mathbf{v}^\wedge$	$\mathbf{C}^{-1} \equiv \mathbf{C}^\text{T} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\phi^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \phi^\wedge$	$\mathbf{J}^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n$ $\equiv \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \mathbf{1} + (1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2}) \mathbf{a} \mathbf{a}^\top - \frac{\phi}{2} \mathbf{a}^\wedge$ $\approx \mathbf{1} - \frac{1}{2} \phi^\wedge$
$\mathbf{u}^\wedge \mathbf{v}^\text{T} \equiv -\mathbf{u}^\wedge$ $\mathbf{u}^\wedge \mathbf{v} \equiv -\mathbf{v}^\wedge \mathbf{u}$	$\phi = \phi \mathbf{a}$ $\mathbf{a}^\text{T} \mathbf{a} \equiv 1$ $\mathbf{C}^\text{T} \mathbf{C} \equiv \mathbf{1} \equiv \mathbf{C} \mathbf{C}^\text{T}$ $\text{tr}(\mathbf{C}) \equiv 2 \cos \phi + 1$ $\det(\mathbf{C}) \equiv 1$	$\exp((\phi + \delta \phi)^\wedge) \approx \exp((\mathbf{J} \delta \phi)^\wedge) \exp(\phi^\wedge)$ $\mathbf{C} \equiv \mathbf{1} + \phi^\wedge \mathbf{J}$ $\mathbf{J}(\phi) \equiv \mathbf{C} \mathbf{J}(-\phi)$ $(\exp(\delta \phi)^\wedge \mathbf{C})^\alpha \approx (1 + (A(\alpha, \phi) \delta \phi)^\wedge)^\alpha \mathbf{C}^\alpha$ $A(\alpha, \phi) = \alpha \mathbf{J}(\alpha \phi) \mathbf{J}(\phi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n!} (\phi^\wedge)^n$
$(\mathbf{W} \mathbf{u})^\wedge \equiv \mathbf{u}^\wedge (\text{tr}(\mathbf{W}) \mathbf{1} - \mathbf{W}) - \mathbf{W}^\text{T} \mathbf{u}^\wedge$ $\mathbf{u}^\wedge \mathbf{v}^\wedge \equiv -(\mathbf{u}^\text{T} \mathbf{v}) \mathbf{1} + \mathbf{v} \mathbf{u}^\text{T}$ $\mathbf{u}^\wedge \mathbf{W} \mathbf{v}^\wedge \equiv -(-(\text{tr}(\mathbf{v} \mathbf{u}^\text{T}) \mathbf{1} + \mathbf{v} \mathbf{u}^\text{T})$ $\times (-\text{tr}(\mathbf{W}) \mathbf{1} + \mathbf{W}^\text{T}) + \text{tr}(\mathbf{W}^\text{T} \mathbf{v} \mathbf{u}^\text{T}) \mathbf{1} - \mathbf{W}^\text{T} \mathbf{v} \mathbf{u}^\text{T})$ $\mathbf{u}^\wedge \mathbf{v}^\wedge \mathbf{u}^\wedge \equiv \mathbf{u}^\wedge \mathbf{u}^\wedge \mathbf{v}^\wedge + \mathbf{v}^\wedge \mathbf{u}^\wedge \mathbf{u}^\wedge + (\mathbf{u}^\text{T} \mathbf{u}) \mathbf{v}^\wedge$ $(\mathbf{u}^\wedge)^3 + (\mathbf{u}^\text{T} \mathbf{u}) \mathbf{u}^\wedge \equiv 0$ $\mathbf{u}^\wedge \mathbf{v}^\wedge \mathbf{v}^\wedge - \mathbf{v}^\wedge \mathbf{v}^\wedge \mathbf{u}^\wedge \equiv (\mathbf{v}^\wedge \mathbf{u}^\wedge \mathbf{v})^\wedge$ $[\mathbf{u}^\wedge, \mathbf{v}^\wedge] \equiv \mathbf{u}^\wedge \mathbf{v}^\wedge - \mathbf{v}^\wedge \mathbf{u}^\wedge \equiv (\mathbf{u}^\wedge \mathbf{v})^\wedge$ $[\mathbf{u}^\wedge, [\mathbf{u}^\wedge, \dots [\mathbf{u}^\wedge, \mathbf{v}^\wedge] \dots]] \equiv ((\mathbf{u}^\wedge)^n \mathbf{v})^\wedge$	$\mathbf{C} \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^\wedge \mathbf{C}$ $\mathbf{C} \phi^\wedge \equiv \phi^\wedge \mathbf{C}$ $(\mathbf{C} \mathbf{u})^\wedge \equiv \mathbf{C} \mathbf{u}^\wedge \mathbf{C}^\text{T}$ $\exp((\mathbf{C} \mathbf{u})^\wedge) \equiv \mathbf{C} \exp(\mathbf{u}^\wedge) \mathbf{C}^\text{T}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi, \delta \phi \in \mathbb{R}^3, \mathbf{W}, \mathbf{A}, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{C} \in SO(3)$

表 2:  $SE(3)$  性质与其近似形式

李群	李代数	(左) 雅可比
$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$	$T = \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$	$\mathcal{J} = \int_0^1 \mathcal{T}^\alpha d\alpha \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$
$x^\wedge = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} v^\wedge \\ 0^\Gamma \end{bmatrix}^\wedge$	$\equiv 1 + \boldsymbol{\xi}^\wedge + \left( \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^2 + \left( \frac{\phi - \sin \phi}{\phi^3} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^3$	$= \mathbf{1} + \left( \frac{4 - \phi \sin \phi - 4 \cos \phi}{4\phi^2} \right) \boldsymbol{\xi}^\wedge + \left( \frac{4\phi - 5 \sin \phi + \phi \cos \phi}{2\phi^3} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^2$
$x^\wedge = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} v^\wedge \\ u^\wedge \end{bmatrix}^\wedge$	$T \equiv \begin{bmatrix} C & J\rho \\ 0^\Gamma & 1 \end{bmatrix}$	$+ \left( \frac{2 - \phi \sin \phi - 2 \cos \phi}{2\phi^4} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^3 + \left( \frac{2\phi - 3 \sin \phi + \phi \cos \phi}{2\phi^5} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^4$
$\boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \text{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)$	$\boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$	$\approx \mathbf{1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\wedge$
$\mathcal{T} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$	$\mathcal{T} \equiv \begin{bmatrix} J & Q \\ 0 & J \end{bmatrix}$	$\mathcal{J} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\wedge$
$(\alpha x + \beta y)^\wedge \equiv \alpha x^\wedge + \beta y^\wedge$	$\equiv 1 + \left( \frac{3 \sin \phi - \phi \cos \phi}{2\phi} \right) \boldsymbol{\xi}^\wedge + \left( \frac{4 - \phi \sin \phi - 4 \cos \phi}{2\phi^2} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^2$	$\mathcal{T}^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^\wedge$
$(\alpha x + \beta y)^\wedge \equiv \alpha x^\wedge + \beta y^\wedge$	$+ \left( \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{2\phi^3} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^3 + \left( \frac{2 - \phi \sin \phi - 2 \cos \phi}{2\phi^4} \right) (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^4$	$\mathcal{J}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -J^{-1}QJ^{-1} \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix}$
$x^\wedge y \equiv -y^\wedge x$	$\approx \mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}^\wedge$	$\mathcal{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m+2)!} (\boldsymbol{\phi}^\wedge)^n \boldsymbol{\rho}^\wedge (\boldsymbol{\phi}^\wedge)^m$
$x^\wedge x \equiv \mathbf{0}$	$\mathcal{T} = \text{Ad}(T) \equiv \begin{bmatrix} C & (J\rho)^\wedge C \\ 0 & C \end{bmatrix}$	$\equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^\wedge + \left( \frac{\phi - \sin \phi}{\phi^3} \right) (\boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\rho}^\wedge + \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge + \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge)$
$(x^\wedge)^4 + 2(v^\Gamma v)(x^\wedge)^3 + (v^\Gamma v)^2(x^\wedge) \equiv \mathbf{0}$	$\text{tr}(T) \equiv 2 \cos \phi + 2, \det(T) \equiv 1$	$+ \left( \frac{\phi^2 + 2 \cos \phi - 2}{2\phi^4} \right) (\boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\rho}^\wedge + \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge - 3 \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge)$
$[x^\wedge, y^\wedge] \equiv x^\wedge y^\wedge - y^\wedge x^\wedge \equiv (x^\wedge y)^\wedge$	$\text{Ad}(T_1 T_2) = \text{Ad}(T_1) \text{Ad}(T_2)$	$+ \left( \frac{2\phi - 3 \sin \phi + \phi \cos \phi}{2\phi^5} \right) (\boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge + \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge \boldsymbol{\rho}^\wedge \boldsymbol{\phi}^\wedge)$
$[x^\wedge, y^\wedge] \equiv x^\wedge y^\wedge - y^\wedge x^\wedge \equiv (x^\wedge y)^\wedge$	$T^{-1} \equiv \exp(-\boldsymbol{\xi}^\wedge) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n \approx \mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}^\wedge$	$\exp((\boldsymbol{\xi} + \delta \boldsymbol{\xi})^\wedge) \approx \exp((\mathcal{T} \delta \boldsymbol{\xi})^\wedge) \exp(\frac{\boldsymbol{\xi}^\wedge}{\boldsymbol{\xi} + \delta \boldsymbol{\xi}})$
$\underbrace{[x^\wedge, [x^\wedge, \dots [x^\wedge, y^\wedge] \dots]]}_{n} \equiv ((x^\wedge)^n y)^\wedge$	$T^{-1} \equiv \begin{bmatrix} C_\Gamma & 1 \\ 0^\Gamma & -C_\Gamma \end{bmatrix}$	$\exp((\boldsymbol{\xi} + \delta \boldsymbol{\xi})^\wedge) \approx \exp((\mathcal{T} \delta \boldsymbol{\xi})^\wedge) \exp(\frac{\boldsymbol{\xi}^\wedge}{\boldsymbol{\xi} + \delta \boldsymbol{\xi}})$
$\boldsymbol{p}^\odot = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}^\odot = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} & -\boldsymbol{\varepsilon}^\wedge \\ 0^\Gamma & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\mathcal{T}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} C_\Gamma & 1 \\ -C_\Gamma & C_\Gamma \end{bmatrix}$	$\mathcal{T} \equiv \mathbf{1} + \boldsymbol{\xi}^\wedge \mathcal{J}$
$\boldsymbol{p}^\odot = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta \end{bmatrix}^\odot = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^\wedge & \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\mathcal{J} \boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\wedge \mathcal{J}$	$\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathcal{T} \mathcal{J}(-\boldsymbol{\xi})$
$T \boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\wedge T, \mathcal{T} \boldsymbol{\xi}^\wedge \equiv \boldsymbol{\xi}^\wedge \mathcal{T}$	$(\mathcal{T} \boldsymbol{x})^\wedge \equiv T \boldsymbol{x}^\wedge T^{-1}, (\mathcal{T} \boldsymbol{x})^\wedge \equiv \mathcal{T} \boldsymbol{x}^\wedge \mathcal{T}^{-1}$	$(\exp(\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge) T)^\alpha \approx (\mathbf{1} + (\mathcal{A}(\alpha, \boldsymbol{\xi}) \delta \boldsymbol{\xi})^\wedge) T^\alpha$
$x^\Gamma \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}^\odot \boldsymbol{x}$	$\exp((\mathcal{T} \boldsymbol{x})^\wedge) \equiv T \exp(\boldsymbol{x}^\wedge) T^{-1}$	$\mathcal{A}(\alpha, \boldsymbol{\xi}) = \alpha \mathcal{J}(\alpha \boldsymbol{\xi}) \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\alpha)}{n!} (\boldsymbol{\xi}^\wedge)^n$
$p^\Gamma x^\wedge \equiv x^\Gamma p^\odot$	$\exp((\mathcal{T} \boldsymbol{x})^\wedge) \equiv \mathcal{T} \exp(\boldsymbol{x}^\wedge) \mathcal{T}^{-1}$	
$(Tp)^\odot \equiv Tp^\odot \mathcal{T}^{-1}$	$(Tp)^\odot \equiv Tp^\odot \mathcal{T}^{-1}$	
$(Tp)^\odot \equiv \mathcal{T}^{-1} p^\odot \mathcal{T}^{-1}$	$(Tp)^\odot \equiv \mathcal{T}^{-1} p^\odot \mathcal{T}^{-1}$	

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, u, v, \phi, \delta\phi \in \mathbb{R}^3, p \in \mathbb{R}^4, x, y, \boldsymbol{\xi}, \delta\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6, C \in SO(3), \mathbf{J}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, T, T_1, T_2 \in SE(3), \mathcal{T} \in \text{Ad}(SE(3)), \mathcal{J}, \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$

## 6 轨迹的描绘 (2 分, 约 1 小时)

我们通常会记录机器人的运动轨迹, 来观察它的运动是否符合预期。大部分数据集都会提供标准轨迹以供参考, 如 kitti、TUM-RGBD 等。这些文件会有各自的格式, 但首先你要理解它的内容。记世界坐标系为  $W$ , 机器人坐标系为  $C$ , 那么机器人的运动可以用  $T_{WC}$  或  $T_{CW}$  来描述。现在, 我们希望画出机器人在世界当中的运动轨迹, 请回答以下问题:

- 事实上,  $T_{WC}$  的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么? 为何画出  $T_{WC}$  的平移部分就得到了机器人的轨迹?
- 我为你准备了一个轨迹文件 (code/trajectory.txt)。该文件的每一行由若干个数据组成, 格式为

$$[t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w],$$

其中  $t$  为时间,  $t_x, t_y, t_z$  为  $T_{WC}$  的平移部分,  $q_x, q_y, q_z, q_w$  是四元数表示的  $T_{WC}$  的旋转部分,  $q_w$  为四元数实部。同时, 我为你提供了画图程序 draw\_trajectory.cpp 文件。该文件提供了画图部分的代码, 请你完成数据读取部分的代码, 然后书写 CMakeLists.txt 以让此程序运行起来。注意我们需要用到 Pangolin 库来画图, 所以你需要事先安装 Pangolin (如果你做了第一次作业, 那么现在已经安装了)。CMakeLists.txt 可以参照 ORB-SLAM2 部分。

## 7 \* 轨迹的误差 (2 分, 约 1 小时)

本题为附加题。

除了画出真实轨迹以外, 我们经常需要把 SLAM 估计的轨迹与真实轨迹相比较。下面说明比较的原理, 请你完成比较部分的代码实现。

设真实轨迹 (ground-truth) 为  $\mathbf{T}_g$ , 估计轨迹  $\mathbf{T}_e$ 。它们都以  $\mathbf{T}_{WC}$  的形式存储, 格式同上题。现在, 你需要计算估计轨迹的误差。我们假设每一个  $\mathbf{T}_g$  都与给定的  $\mathbf{T}_e$  对应。那么, 对于任意第  $i$  个位姿, 它的误差可定义为:

$$e_i = \|\log(\mathbf{T}_{gi}^{-1} \mathbf{T}_{ei})^\vee\|_2. \quad (7)$$

即两个位姿之差的李代数二范数。于是, 可以定义两条轨迹的均方根 (Root-Mean-Square-Error, RMSE) 误差为:

$$\text{RMSE}(g, e) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2}. \quad (8)$$

我为你准备了 code/ground-truth.txt 和 code/estimate.txt 两条轨迹。请你根据上面公式, 实现 RMSE 的计算代码, 给出最后的 RMSE 结果。作为验算, 参考答案为: 2.207。

注:

1. 公式 (7) 满足度量的定义: 非负性、同一性、对称性、三角不等式, 故形成距离函数。类似的, 可以定义  $\text{SO}(3)$  上的距离为:

$$d(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \left\| \ln(\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2)^\vee \right\|_2.$$

关于距离定义可以参见拓扑学或者泛函教材。

2. 实际当中的轨迹比较还要更复杂一些。通常 ground-truth 由其他传感器记录 (如 vicon), 它的采样频率通常高于相机的频率, 所以在处理之前还需要按照时间戳对齐。另外, 由于传感器坐标系不一致, 还需要计算两个坐标系之间的差异。这件事也可以用 ICP 解得, 我们将在后面的课程中讲到。
3. 你可以用上题的画图程序将两条轨迹画在同一个图里, 看看它们相差多少。